R

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Anfangsgründe der Mechanick im allerengsten Verstande, oder eigentlich der Statick.

Zum Gebrauche bey seinen Vorlesungen abgefaßt

von

Heinrich Johannes Krebs,

Königl. Dänischem Artillerie-Major und Commandeur eines Bataillons Artillerie bey der Landwehre; wie auch Königl. Dänischem Professor, und Lehrer in der Mathematick und den militairischen Wissenschaften auf der Königl. Landkadetten-Academie und bey der Königl. Artillerie-Schule; und ordentlichem Mitgliede der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Copenhagen.

Mit 12 Kupfertafeln.

Copenhagen und Leipzig.
Bey Johann Heinrich Schubothe.

Gedruckt bey N. Møller und Sohn, Hof- und Universitetsbuchdruckern.

1802.

Vorrede.

Die eigentliche Mechanick, worin die ewigen und unveränderlichen Grundgesetze der Natur in Hinsicht der Bewegung fester Körper, sowohl algemein, als auch mit Anwendung auf die Bestimmung der Kräfte bey Maschinen im gemeinen Leben untersucht und bestimmt werden, ist wohl ohnstreitig unter allen Theilen der angewandten Mathematick nicht allein eine der gemeinnützlichsten, sondern auch wohl ganz gewis eine der angenehmsten Wissenschaften für einen jeden denkenden Kopf. Ich habe daher mich auch um so viel mehr immer vor-

zügliche

züglich bemüht, die Anfangsgründe dieser Wissenschaft meinen Zuhörern nur recht faßlich und leicht vorzutragen; um dadurch bey ihnen Lust und Liebe zu diesen nützlichen Kenntnissen zu erwecken. Dies ist denn freylich bey der Ausarbeitung dieses Lehrbuches meine erste und Hauptabsicht gewesen; indessen darf ich mir doch auch schmeicheln, einige Lehren, z. E. in diesem ersten Theile die Lehre von dem Schwerpuncte der ebenen Figuren und Körper (§. 64), und die Lehre vom Keile (§. 118-121) aus einem etwas andern Gesichtspuncte,

wie

wie andere angesehen, und zum Theil wohl richtiger, wie gewöhnlich bestimmt zu haben. In wie ferne ich nun in beyder Hinsicht glücklich gewesen bin, oder nicht, muß ich jetzt dem Urtheile unpartheyischer Kenner überlassen.

Uebrigens habe ich diese Anfangsgründe unter einem doppelten Titel abdrucken lassen, damit dieser erste Theil, der blos die Anfangsgründe der Statick enthält, doch immer als ein Ganzes für sich angesehen werden könne, wenn sowohl meine Gesundheit und zunehmenden Jahre, als meine vielen mir obliegenden Ge-

schäfte

schäfte mir nicht erlauben sollten, den 2ten Theil der eigentlichen Mechanick dergestalt auszuarbeiten, daß ich sie der gelehrten Welt vorlegen, und dem Drucke übergeben mögte.

Copenhagen den 31 Julii 1802.

H. J. Krebs.

Verzeichnis des Inhalts.

§. 1-7. Vorläufige Erklärungen, und was insonderheit die Statick lehre.

§. 8-12. Vorläufige Erklärung der Schwere, und einige Bemerkungen in Hinsicht derselben.

§. 13-14. Algemeines Grundgesetz der Statik.

§. 15-40. Erklärung der einfachen Maschinen, und zwar

1. des Hebels, §. 15-18.
2. des Rades an eine Axe, §. 19-23.
3. der Rolle und des Flaschenzuges, §. 24-32.
4. der schiefliegenden Fläche, §. 33-35.
5. der Schraube, §. 36-38.
6. des Keils, §. 39-40.

§. 41-77. Bestimmung verschiedener Begriffe, und Erklärung verschiedener Sachen, worauf die weitere Abhandlung der Statick beruht; und zwar

1.

1. Eine genaue Bestimmung der Richtungslinie fallender Körper, und die daraus folgende bestimmte Erklärung der Schwere, §. 42-44.

2. Erklärung der Richtungs- oder Directionslinie der Kräfte bey Maschinen, §. 45-46.

3. Was man in der Statick die Grundfläche eines Körpers nenne, §. 47.

4. Erklärung des Schwerpunctes der Körper, und unter welchen Umständen ein Körper ruhen oder still liegen müsse, §. 48-52.

5. Bestimmung des Schwerpunctes bey einigen geometrischen Linien, ebenen Figuren und Korpern, §. 53-64.

6. Was die Entfernung der Kräfte bey Maschinen sey, §. 65-67.

7. Abhandlung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte, §. 68-77.

§. 78-121. Abhandlung und genaue Bestimmung des Vermögens der einfachen Maschinen, und zwar

1. des Hebels, §. 79-90.
2. des Rades an einer Axe, §. 91-95.
3. der Rolle und der Flaschenzüge, §. 96-102.
4. der schiefliegenden Fläche, §. 103-113.
5. der Schraube, §. 114-117.
6. des Keils, §. 118-121.

§. 122.

§. 122-134. Abhandlung und Bestimmung des Vermögens einiger zusammengesetzten Maschinen; und zwar

1. eines Räderwerkes, welches durch eine Schraube ohne Ende mit einer Kurbel bewegt wird, §. 123.
2. eines sogenannten Krahns oder Kranichs, §. 124-125.
3. zweyer verschiedenen Arten von Artillerie-Krahnen, §. 126-134.

§. 135-140. Einige algemeine Bemerkungen wegen Einrichtung der Maschinen, in Hinsicht der verschiedenen Kräfte, wodurch die Maschinen in Bewegung gesetzt werden; und zwar

1. von ordentlichen Wind- und Wassermühlen, und von Dampfmaschinen, §. 136.
2. von kleinern Mühlen, welche durch Pferde und andere Thiere; oder auch durch Menschen bewegt werden, §. 137.
3. von Räderwerken, welche durch blosse Gewichter in Bewegung gesetzt werden, wie z. E. Hausuhren und Bratenwender, §. 138; und endlich
4. von Räderwerken, wobey die bewegende Kraft eine Feder ist, z. E. bey Tafel- und Taschenuhren, §. 139-140.

§. 141 - 142. Vom Schwungrade.

§. 143 - 148. Von der Reibung oder Friction bey Maschinen.

§. 149 - 165. Weitere Abhandlung der Lehre, den Schwerpunct in verschiedenen Linien, ebenen Figuren und Körpern geometrisch zu finden.

Anfangsgründe der Mechanick im engsten Verstande, oder eigentlich der Statick.

§. 1 = 7. Vorläufige Erklärungen, und was insonderheit die Statick lehre.

§. 1.

Wenn ein Körper seinen Ort oder Stelle verändert: so sagt man, daß er sich bewege; verändert er im Gegentheil seinen Ort nicht, sondern bleibt auf einer und derselben Stelle: so sagt man, daß er ruhe.

Was nun einen ruhenden Körper in Bewegung zu setzen, oder die Bewegung eines Körpers zu verändern sich bemüht, nennt man eine bewegende Kraft; und alsdenn wird der Körper selbst, der auch eine Kraft anwendet, der bewegenden Kraft zu widerstehen, die widerstehende Kraft, oder im gemeinen Leben kurz eine Last genannt.

§. 2.

Alles was eine Kraft vermögender macht, als sie an und für sich war, und sie also in den Stand setzt, eine grössere Wirkung hervorzubringen, als sie sonst für sich allein konnte, nennt man eine Maschine; deren es beydes ganz einfache und zusammengesetzte giebt.

§. 3.

Die Lehre von den Gesetzen der Bewegung der Körper, und von den Kräften, welche diese Bewegungen verursachen, heißt im weitläuftigsten Verstande die Mechanick.

Die Körper aber, welche bewegt werden, und bey denen man die Gesetze der Bewegung untersucht, sind entweder feste oder flüssige Körper. Betrachtet und bestimmt man nun blos die Bewegungen der festen Körper: so ist dies der Gegenstand der eigentlichen Mechanick; sieht man aber nicht auf diesen Unterschied: so gehören zur Mechanick alle gewöhnlichen so genannten mechanischen Theile der angewandten Mathematick, nemlich: die eigentliche Mechanick, die Hydrostatick, die Hydraulick und die Aerometrie.

Die eigentliche Mechanick aber läßt sich wieder in 2 Theile eintheilen. Wenn die Bewegun-

gen der festen Körper durch Maschinen verursacht werden, und man alsdenn nur diese Bewegungen untersucht, und das Vermögen der Kräfte, welche diese Bewegungen verursachen, bestimmt: so ist dies die Mechanick im allerengsten Verstande, und dieser erste Theil der eigentlichen Mechanick wird, wie ich nachher zeigen werde, besser die Statick genannt. Wenn man aber andere Bewegungen der festen Körper, z. E. die Bewegung eines geworfenen, oder blos fallenden Körpers, die Bewegung der Penduln, und andere dergleichen Bewegungen untersucht, und die Gesetze solcher Bewegungen bestimmt: so macht dies den 2ten Theil der eigentlichen Mechanick aus, oder wird vielmehr ganz allein schlechthin die eigentliche Mechanick genannt.

§. 4.

Bey einer jeden Bewegung eines festen Körpers durch Maschinen aber sucht man entweder einen Vortheil der Kraft oder der Zeit zu erhalten, man kann daher auch sagen: die Mechanick im allerengsten Verstande oder der Statick, sey eine Wissenschaft, entweder mit Vortheil der Kraft oder der Zeit feste Körper durch Maschinen zu bewegen.

§. 5.

Einen Vortheil der Kraft erhält man, wenn man eine grosse Last mit wenig Kraft bewegt; einen Vortheil der Zeit aber kann man auf eine doppelte Art erhalten, entweder daß man blos eine langsame Bewegung geschwinder macht, oder daß man eine gleichförmige und bestimmte Bewegung zu Wege bringt. Wie z. E. bey einer Uhre.

Uebrigens wird in der Folge erhellen, daß es nicht möglich sey, beyde Vortheile der Kraft und der Zeit zugleich zu erhalten, indem eins dem andern gänzlich widerspricht.

§. 6.

Nach diesen Erklärungen sollte demnach jezt in der Mechanick im allerengsten Verstande eigentlich gezeigt werden, wie es möglich sey, daß eine grosse Last durch den Gebrauch einer Maschine mit einer mehr oder weniger kleinen Kraft in Bewegung gesezt werden könne, und würklich bewegt werde. Allein es wird doch eigentlich nur gewiesen, wie und unter welchen Umständen zwey ungleiche Kräfte an einer Maschine dergestalt einander entgegengesezt wirken können, oder wie das Verhältniß der beyden Kräfte seyn müsse, daß keine Bewegung erfolge, oder daß

die beyden Kräfte, wie man sagt, sich einander das Gleichgewicht halten können; und alsdenn pflegt man die Kräfte **todte Kräfte**, im Gegentheil aber, wenn eine Bewegung erfolgt, **lebendige Kräfte** zu nennen.

Soll eine Last durch eine Maschine würklich bewegt werden, oder sollen dabey gar überhaupt die Gesetze der Bewegung untersucht und bestimmt werden: so kommt nicht blos die Vermehrung der Kraft, welche durch die Maschine bewirkt wird, in Betracht; sondern es müssen alsdenn noch weit andere Umstände erwogen, und bey Maschinen insonderheit die Reibung mit in Erwägung gezogen werden. In sofern wird daher auch in den neuern Zeiten die Wissenschaft, welche ehedem vielfältig so unbedingt die Mechanick genannt wurde, wie ich schon (§. 3) gesagt habe, besser und richtiger die Statick genannt.

§. 7.

Indessen ist doch wieder alle nöthige Vermehrung der Kraft durch Maschinen, zum Gleichgewichte mit einer grössern Last, in der verhältnismässigen geschwindern Bewegung, oder kurz in der grössern Geschwindigkeit der Kraft, in Vergleichung mit der Bewegung oder der Geschwindigkeit der Last, wenn würklich eine Bewegung erfolgte, zu suchen.

§. 8-12. Vorläufige Erklärung der Schwere, und einige Bemerkungen in Hinsicht derselben.

§. 8.

Aus der Erfahrung weiß man, daß, wenn man einen Körper, z. E. einen Stein, oder ein Stück Eisen auf die Hand legt; so empfindet man, wie man sagt, einen Druck; oder man sagt, der Körper druckt einem nach Beschaffenheit des Körpers mehr oder weniger die Hand, und man muß ihm mit einer gewissen Gewalt entgegen drucken, um ihn zu halten.

Zieht man die Hand schnell unter dem Körper weg, ohne ihm im geringsten einen Stoß zu geben: so geht er von selbst in gerader Linie gegen die Erde zu, und man sagt, daß er falle.

Diese Kraft nun, womit der Körper auf die Hand druckt, so lange man ihn hält, oder sich gegen die Erde zu hinbewegt, wenn man ihn nicht mehr hält, heißt die Schwere.

§. 9.

Weiter unten wird von der Schwere des Körpers noch verschiedenes angeführt, und näher bestimmt werden; hier merke man nur vor der Hand davon folgendes.

1. In einem luftleeren Raume fallen die Körper von verschiedener Art und Grösse, z. Ex. eine Feder, ein Stück Holz, und ein Stück Eisen gleich geschwind zu Boden; und in so ferne haben also alle Körper eigentlich einerley Schwere. In der Luft aber fällt eine eiserne Kugel geschwinder zur Erde herunter, als eine eben so grosse hölzerne Kugel; und eben so sinkt eine bleyerne Kugel im Wasser geschwinder zu Boden, als eine eben so grosse zinnerne Kugel, und ein Stück Holz sinkt gar nicht zu Boden, sondern schwimmt oben auf dem Wasser. Alle Körper haben folglich doch nicht gleich viel Kraft, den Widerstand der Luft im Fallen, oder des Wassers im Sinken zu überwinden; und aus eben der Ursache druckt eine eiserne Kugel einem stärker auf die Hand, als eine eben so grosse hölzerne Kugel. Diese eigene Kraft einer jeden Art Körper bey einer gewissen Grösse, macht eigentlich, wie man sagt, das **Gewicht der Körper** aus; im gemeinen Leben aber, und nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche wird sie auch schlechthin **die Schwere derselben** genannt. [1])

Ver=

[1]) So sagt auch selbst der berühmte und gelehrte Verfasser der Briefe an eine deutsche Princeßin über verschiedene Gegenstände aus der Physick und Philosophie, im 46 Briefe (nach der Leipziger Ausgabe von 1784 pag. 152) ausdrücklich: "Es ist klar, daß

Verschiedene gleich grosse Körper haben also äusserst selten einerley Gewicht, oder sind äusserst selten gleich schwer; und eben so haben vielfältig 2 Körper von sehr verschiedener Grösse einerley Schwere, und drucken gleich stark, oder wiegen gleich viel. So ist z. E. eine eiserne Kugel viel schwerer, als eine eben so grosse hölzerne Kugel; und im Gegentheil, wenn eine hölzerne Kugel so viel wiegt, wie eine eiserne: so ist jene viel grösser, wie diese.

Körper aber, die bey einerley Grösse mit andern Körpern schwerer sind, wie diese, werden **Körper von schwererer Art** genannt; oder man sagt von ihnen, daß sie **eine grössere eigenthümliche (specifische) Schwere** haben; und eben so werden Körper, welche bey einerley Schwere mit andern Körpern grösser wie diese sind, **Körper von leichterer Art**, wie diese genannt; oder man sagt von ihnen, daß sie **eine kleinere eigenthümliche Schwere** haben.

§. 10.

2. Gleich schwere Körper, sie mögen von einerley Art, und folglich auch gleich groß, oder von ver-

" daß das Gewicht und die Schwere einerley bedeu-
" ten; beyde nemlich die Kraft, von der jeder Kör-
" per nach unten zu getrieben wird."

verschiedener Art, und also auch von verschiedener Grösse seyn, drucken, so lange sie still liegen, gleich stark; und ungleich schwere Körper, sie mögen ebenfalls von einerley oder von verschiedener Art seyn, drucken, wenn sie still liegen, verhältnismässig nach ihrer Schwere, z. E. eine 6pfündige eiserne und eine 6pfündige hölzerne Kugel drucken gleich stark, und zwar beyde mit der bestimmten Kraft von 6 Pfund; eine hölzerne 6pfündige Kugel aber druckt doppelt so stark, wie eine 3pfündige eiserne.

§. 11.

3. So bald ein Körper aber ferner, nur von einer kleinen Höhe auf die Hand herabfällt: so ist der Druck in dem Augenblicke, wenn er zuerst die Hand berührt, stärker, als wenn er still liegt; und von je grösserer Höhe er herabfällt, desto stärker wird auch, weil die Geschwindigkeit des Körpers im Fallen immer zunimmt, dieser Druck.

§. 12.

4. Diese Vergrösserung des Druckes eines Körpers durch die Bewegung desselben findet aber nicht allein statt, wenn er nach seiner Schwere herabfällt; sondern der Druck oder die Wirkung der Schwere eines Körpers wird auch nach eben dem Ge-

setze

setze vermehrt, wenn er durch eine äussere Kraft nach einer andern Richtung, etwa seitwärts an etwas geworfen wird. So macht z. E. eine Kugel einen ganz andern Eindruck in eine Wand, wenn sie aus einer Kanone geschossen, als wenn sie nur aus der Hand geworfen wird.

§. 13-14. Allgemeines Grundgesetz der Statick.

§. 13.

Ein ewiges unveränderliches Gesetz der Natur ist also, daß ein Körper stärker drucke, und also auch eine grössere Kraft habe, einem andern Gegendrucke zu widerstehen, wenn er in Bewegung ist, als wenn er still liegt; und daß diese Kraft verhältnismässig immer grösser sey, je geschwinder er sich bewege.

Eine kleinere Kraft wird also auch immer einer grössern Kraft, welche jener entgegen gesetzt wirkt, nicht nur hinlänglich widerstehen, oder ihr das Gleichgewicht halten, sondern so gar weit übertreffen können, wenn sie nur die dazu erforderliche Geschwindigkeit hat.

§. 14.

Dieses Gesetz der Natur (§. 13) ist denn nun der Grund von einer jeden Vergrösserung einer Kraft durch eine Maschine. Nur frägt es sich jezt, in welchem Verhältnisse die Vermehrung der Kraft durch die grössere Geschwindigkeit zunimmt. Wird vielleicht der Druck eines Körpers, z. E. einer eisernen Kugel, wenn sie das eine mal doppelt so geschwind, wie das andere mal geht, auch im erstern Falle genau doppelt so stark seyn, oder doppelt so viele Kraft haben, einem Gegendrucke zu widerstehen; und wird also vielleicht etwa eine 6pfündige Kugel genau eben so viel wirken, wie eine 12pfündige, wenn jene eine doppelt so grosse Geschwindigkeit, wie diese hat; oder nimmt die Vermehrung der Kraft durch die Bewegung in einem grössern oder kleinern Verhältnisse zu? Dieses kann nicht so leicht durch die Erfahrung ausgemacht, sondern muß nach anderweitigen Gründen und Betrachtungen dargethan und bestimmt werden.

§. 15-40. Erklärung der einfachen Maschinen.

1. Erklärung des Hebels (§. 15-18.)

§. 15.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen müssen jezt erst die einfachen Maschinen erklärt, und dabey

zugleich

zugleich gezeigt werden, in wie ferne sie das Vermögen einer Kraft vergrössern, und also mit Recht Maschinen genannt werden können.

Die erste einfacheste und eigentlich einzige Maschine in der ganzen Natur ist der Hebel.

Eine gerade unbiegsame Linie AB (fig. 1), die man sich ohne alle Schwere gedenkt, und bey der an 2 verschiedenen Puncten, z. E. an den beyden Endpuncten A und B ein Paar einander entgegen gesezt wirkende Kräfte dergestalt angebracht sind, daß, wenn zwischen ihnen das Gleichgewicht gehoben wird, diese Linie sich um einen 3ten festen oder unterstüzten Punct der Linie C drehen muß, wird ein geradlinigter mathematischer Hebel genannt.

Der Punct C, um den sich der Hebel bey gehobenem Gleichgewichte drehet, heißt der Ruhepunct oder Bewegungspunct des Hebels, und was den Hebel in diesem Puncte unterstüzt, die Unterlage desselben.

§. 16.

Wenn beyde Kräfte P und Q (fig. 1) an dem Hebel nach einer Seite ziehen: so muß der Ruhepunct C zwischen den beyden Puncten der Kräfte liegen; und der Hebel heißt alsdenn ein waagförmiger Hebel. Ziehen aber die beyden Kräfte nach

ver-

verschiedenen Seiten (fig. 2): so muß der Ruhepunct an dem einen Ende des Hebels seyn; und der Hebel wird alsdenn ein Hebel der 2ten Art genannt.

Wenn nun aber noch bey dem Hebel der 2ten Art unter Last und Kraft ein Unterschied gemacht wird: so nennt man den Hebel (fig. 2), wenn die Last irgendswo in der Mitte, und die Kraft an einem Ende des Hebels ist, einen Traghebel; und im Gegentheil, wenn (fig. 3) die Kraft in der Mitte, die Last aber am Ende angebracht ist: so wird er ein Wurfhebel genannt.

§. 17.

Wenn bey einem waagförmigen Hebel AB (fig. 4) die Linie durch den Punct der Unterlage C in 2 ungleiche Theile oder Arme AC und BC eingetheilt, und sie alsdenn in Bewegung gesezt wird: so ist klar, daß der eine Arm sich in eben der Zeit oberwärts, als der andere Arm sich unterwärts bewegt. Der Raum Bb, den die Kraft an dem längern Arm durchlauft, ist demnach grösser, als der Raum Aa, durch den die Kraft an dem kürzern Arm in eben der Zeit sich fortbewegt; und es ist also auch die Geschwindigkeit der Kraft an dem längern Arm, in eben dem Verhältnisse, wie bey den Raümen, so vielmal grösser, als die Geschwindigkeit der Kraft an dem kürzern Arm.

Wenn

Wenn nun die eigentliche Kraft an dem längern Arm, die Last aber an dem kürzern Arm angebracht wird: so wird die Kraft sich auch geschwinder, als die Last bewegen, und eben dadurch wird denn auch ihr Vermögen verhältnismässig ungleich mehr vergrössert; und eine kleinere Kraft an dem längern Arm wird also einer grössern Last am kurzern Arm das Gleichgewicht halten können (§. 13). Umgekehrt aber, wenn die Last am längern Arm, und die Kraft am kürzern Arm angebracht ist, wird die Last in der Bewegung eine grössere Geschwindigkeit, wie die Kraft haben; und also wird ein Vortheil der Zeit erhalten werden.

Auf eine ähnliche Art gilt alles dieses ebenfalls von einem jeden Hebel der 2ten Art; und wird demnach durch einen Hebel auf diese oder jene Art ein fester Körper bewegt: so geschieht es immer entweder mit Vortheil der Kraft oder der Zeit; **der Hebel ist also eine Maschine.**

§. 18.

Sowohl der waagförmige Hebel, als die beyden Hebel der 2ten Art, befinden sich im gemeinen Leben bey sehr vielen Sachen unmittelbar.

So sind z. B. nicht nur eine Handspeiche und Hebebaum waagförmige Hebel, sondern Schaufeln,

Spaten,

Spaten, Scheeren u. d. m. sind ebenfalls solche Hebel.

Leichen- und Tragbaaren, Schubkarren u. d. m. sind Traghebel; und endlich sind ausser vielen andern Sachen, die Knochen der Glieder des menschlichen Körpers, und insonderheit die Arme desselben sehr natürliche Wurfhebel.

2. Erklärung des Rades an einer Axe, (§. 19-23.)

§. 19.

Wenn ein Cylinder AB (fig. 5) senkrecht durch die Mitte einer zirkelrunden Scheibe geht, und an derselben so befestiget ist, daß, wenn der Cylinder an beyden Enden gehörig unterstüzt ist, und die Scheibe bewegt wird, jener sich mit dieser zugleich herumbewegen muß: so nennt man die Scheibe ein Rad, und den Cylinder die Axe oder Welle des Rades; und das ganze Werkzeug wird alsdenn ein Rad an der Axe genannt.

Die Welle oder Axe eines Rades ist gewöhnlich an beyden Enden mit Zapfen versehen, womit die Welle auf dazu gehörig eingerichteten Zapfenlagern ruht.

§. 20.

Wenn an der Welle eines Rades ein Strick befestigt ist, welcher sich auf dieselbe aufwinden muß, wenn das Rad mit der Welle herumgedrehet wird: so läßt sich durch eine an der Peripherie des Rades ziehende Kraft, eine an dem Stricke hangende Last in die Höhe ziehen.

Das wesentliche dieses Werkzeuges sind eigentlich nur 2 ungleich grosse Zirkel, durch deren Mittelpunct eine gerade unbiegsame Linie geht; und wovon alsdenn der eine sich nicht ohne den andern um diese Mittelpunctslinie herumbewegen kann. Der kleinere Zirkel stellt den Umkreis der Welle, und der grössere den Umkreis des Rades vor. Man kann aber diese beyden Zirkel sich ganz dicht an einander, oder gar als 2 vollkommen concentrische Zirkel gedenken; und man stellt daher das Rad an einer Axe auch blos durch 2 solche Zirkel vor, (fig. 6).

Wenn nun die beyden Zirkel genau einmal rund gedrehet werden: so ist die Kraft um die Länge der Peripherie des Rades fortgerückt; die Last aber nur um die Länge der Peripherie der Welle in die Höhe gezogen. Es geht also die Kraft so vielmal geschwinder, wie die Last, als die Peripherie des Rades länger ist, wie die Peripherie der Welle. Oder weil die Radien sich wie die Peripherien verhalten:

halten: so verhält sich die Geschwindigkeit der Kraft, zu der Geschwindigkeit der Last, wie der Radius des Rades, zum Radius der Welle. Eine kleinere Kraft an der Peripherie des Rades wird also auch hier einer grössern Last an der Peripherie der Welle das Gleichgewicht halten können (§. 13); und es ist also auch das Rad an einer Axe eine Maschine.

§. 21.

Bey dem Rade an einer Axe kann man ferner sich auch noch einen ordentlichen waagförmigen Hebel unmittelbar gedenken. Man ziehe nur (fig. 6) die Radien AC und BC: so stellt die ganze Linie AB einen waagförmigen Hebel sehr deutlich vor, dessen Bewegungspunct in C; dessen eine Arm der Radius der Welle AC, und dessen andere Arm der Radius des Rades BC ist. Das Rad an einer Axe ist daher auch eigentlich nichts anders, als ein ordentlicher waagförmiger Hebel, welcher aber zum Gebrauche viel bequemer eingerichtet ist, als ein einfacher Hebel. Durch einen blossen Hebel kann man eine Last nur zu einer geringen Höhe bringen, und die Kraft kann nicht einmal bey dieser Hebung der Last beständig auf die beste und vortheilhafteste Art an den Hebel wirken. Das Rad an einer Axe aber stellt in jedem Augenblicke der Bewegung einen neuen Hebel dar,

an welchem die Kraft beständig auf die bequemste Art wirket.

Weiter unten wird gewiesen werden, wie eine Kraft bey einem Rade an einer Axe verschiedentlich angebracht werden kann; und wie alsdenn das Vermögen der Kraft in einem jeden besondern Falle bestimmt werden müsse.

§. 22.

Zu einem Rade an einer Axe wird übrigens eben nicht nothwendig erfordert, daß das Rad allemal einen ganzen Zirkel würklich vorstelle. Im mechanischen Verstande ist es auch schon ein Rad an einer Axe, wenn nur, indem die Welle herumgedrehet wird, auch ein grösserer Zirkel, welcher alsdenn das Rad der Axe ist, beschrieben wird. So beschreibt z. E. die Handspeiche sowohl bey den horizontalen, als bey den verticalen, oder sogenannten Erdwinden das Rad an der Axe; und eben so ist eine Kurbel, womit eine Welle herumgedrehet wird, ein sehr natürliches Rad an einer Axe.

Auch braucht die Axe oder Welle eines Rades eben nicht ein vollkommener Cylinder zu seyn, sondern kann gerne einen prismatischen Körper vorstellen; denn auch diese Körper beschreiben einen Cylinder, wenn sie sich um ihre Axe herumbewegen. So ist

z. E.

z. E. die horizontale Welle, wodurch auf einem Schiffe das Ankertau aufgewunden wird, gemeiniglich ein prismatischer Körper, damit das Tau nicht so leicht darüber wegglitschen möge.

§. 23.

Sehr oft ist ein einziges Rad an der Axe nicht hinreichend, die erforderliche Vermehrung der Kraft zu verschaffen; sondern es werden mehrere Räder dazu erfordert. Diese Räder aber werden alsdenn nicht an einer und derselben Welle, sondern ein jedes Rad für sich an einer besondern Welle, und zwar dergestalt im Zusammenhange mit einander angebracht, daß, wenn sich eins herumbewegt, alle übrigen sich zugleich mit herumbewegen müssen. Dies geschieht nun, wie man bey Spinnrädern, und in Mühlen, Uhren und andern dergleichen Räderwerken sehen kann, entweder blos durch Schnüre oder Ketten (fig. 7), oder durch die sogenannten Zähne an den Peripherien der Räder, womit ein Rad in die Einschnitte der Welle eines andere Rades eingreift (fig. 8). Die Zähne der Räder aber stehen entweder an dem äussersten Umkreise der Räder, mit den Radien derselben in gerader Linie (fig. 9); oder sie stehen seitwärts an dem Umkreise der Räder, und machen mit den Radien derselben rechte Winkel

(fig. 10). Im erstern Falle werden die Räder Stirn- oder Sternräder; im leztern Falle aber Kron- oder Kammräder genannt.

Eine Welle, worin ein Kamm- oder Sternrad mit den Zähnen eingreift, heiß das Getriebe des Rades. Ein Getriebe aber kann auf eine doppelte Art eingerichtet seyn; denn entweder werden blos an der cylindrischen Welle eines Rades der Länge nach Vertiefungen eingeschnitten, worin die Zähne des andern Rades eingreifen, oder es werden 2 runde Scheiben, welche man sich als die Grundflächen eines Cylinders vorstellen kann, durch sogenannte Triebstöcke zusammengefügt; und in diesem leztern Falle pflegt man denn auch wohl das Getriebe einen Trilling zu nennen.

Wenn nachher die Vermehrung einer Kraft durch ein einziges Rad an einer Axe genau bestimmt werden wird: so wird auch dieses bey einem Räderwerke unmittelbar dadurch geschehen können.

3. Erklärung einer Rolle und eines Flaschenzuges, (§. 24-32).

§. 24.

Wenn eine runde Scheibe in ihrer Mitte durchbohret ist, und sie alsdenn auf eine Axe, welche fest-

steht,

steht, und sich nicht mit der Scheibe herumdrehen kann, gesteckt wird: so nennt man diese Scheibe eine Rolle; die Axe aber einen Bolzen.

§. 25.

Eine Rolle ist gewöhnlich, zum Gebrauche im gemeinen Leben, in einem sogenannten Kloben oder einer Flasche (fig. 11) eingefaßt; und wenn alsdann der Kloben mit der Scheibe etwa an einen Nagel oder Hacken aufgehangen oder befestigt wird, und die Scheibe selbst an ihrem äussersten Umkreise eine gerundete Vertiefung hat: so kann ein Tau um die Rolle geschlagen, und auf eine solche Art eine auf der einen Seite angebundene Last, von einer auf der andern Seite am Taue ziehenden Kraft entweder in die Höhe, oder seitwärts fortgezogen werden.

Das wesentliche einer Rolle ist blos ein mathematischer Zirkel, durch dessen Mittelpunct eine mathematische feste Linie geht, um welche sich der Zirkel herum bewegen kann; man stellt sich daher auch die Rolle immer blos unter dem Bilde eines Zirkels vor.

§. 26.

Wenn eine Rolle auf die eben (§. 25) beschriebener Art gebraucht wird, eine Last in die Höhe oder

seit-

seitwärts fortzuziehen: so ist klar, daß Kraft und Last immer gleich geschwind gehen; und obschon man auch hier sich leicht den Hebel AB (fig. 11) gedenken kann: so ist doch der Ruhepunct C genau in der Mitte des Hebels, und die beiden Arme desselben AC und BC sind gleich lang. Es verschaft also eine solche Rolle keinen Vortheil der Kraft; sondern sie kann nur dienen, eine Kraft statt aufwärts, niederwärts, oder überhaupt nach einer jeden beliebigen Richtung ziehend zu machen; oder wie man in der Folge sehen wird, eine andere Art Rollen und andere Maschinen bequem gebrauchen zu können, und es kann demnach auch diese Rolle keine Maschine genannt werden.

§. 27.

Wenn aber bey einer Rolle C (fig. 12), an deren Kloben eine Last unmittelbar befestigt ist, ein um die Rolle gehendes Tau mit dem einen Ende an einen Nagel oder Hacken, etwa in D befestigt ist, und das andere Ende wieder über eine andere Rolle E geführet wird, und nur eine Kraft Q an dem Taue zieht: so wird auf diese Art eine Last P, mit samt der Rolle im Kloben C, entweder in die Höhe oder auch seitwärts fortgezogen werden können; und unter diesen Umständen wird die Rolle im Kloben, eine Rolle von der 2ten Art genannt.

§. 28.

§. 28.

Bey dem Gebrauche einer Rolle von der 2ten Art sieht man bald, daß, wenn die Last P in einer gewissen Zeit, etwa um einen Fuß in die Höhe gezogen wird, das Tau zu beyden Seiten der Rolle in F und G um einen Fuß kurzer werden muß; und die Kraft Q muß also 2 Fuß Tau herausziehen, oder die Kraft muß in eben der Zeit um 2 Fuß fortrücken. Es geht demnach hier, wenn die Last bewegt wird, die Kraft genau doppelt so geschwind, wie die Last; und eine kleinere Kraft wird denn auch, durch den Gebrauch einer Rolle von der 2ten Art, einer grössern Last das Gleichgewicht halten können, und eine Rolle von der 2ten Art ist daher auch eine Maschine.

§. 29.

Auch bey der Rolle von der 2ten Art befindet sich ein Hebel AB ganz deutlich. Wenn aber die Rolle bewegt wird: so geschieht die erste Bewegung des Diameters der Rolle, oder des ganzen Hebels AB um den Punct A, und dieser Endpunct des Diameters der Rolle A ist demnach der Ruhe- oder Bewegungspunct des Hebels AB. Die Last hängt ferner gleichsam unmittelbar im Mittelpuncte der Rolle C, und also in der Mitte des Hebels AB; und end-

lich

lich zieht die Kraft an dem andern Endpuncte des Diameters der Rolle oder des Hebels AB in B; und es ist also hier ein Hebel der 2ten Art, und zwar ein Traghebel, bey dem der Diameter der Rolle oder der ganze Hebel AB der Arm der Kraft, der Radius der Rolle oder der halbe Hebel AC aber der Arm der Last ist.

§. 30.

Uebrigens geht freylich bey einer Rolle der 2ten Art die Kraft nur genau doppelt so geschwind, wie die Last, wenn die Theile des Taues zu beyden Seiten der Rolle AD und BE mit einander vollkommen parallel gehen. Sobald dies nicht der Fall ist: so ist auch sogleich das Verhältniß der Geschwindigkeit zwischen Kraft und Last anders; und dies hat denn auch einen, wiewohl sehr geringen Einfluß auf die Vermehrung der Kraft, welche durch diese Maschine erhalten wird.

Wenn nachher das Vermögen einer Rolle näher bestimmt wird, alsdenn wird auch dieser Umstand näher mit in Erwägung gezogen werden müssen.

§. 31.

Wenn ferner bey einer Rolle der 2ten Art (fig. 13) das eine Ende des Taues unmittelbar an

den

den Kloben der Rolle, worüber das andere Ende des Taues geht, anstatt an einen Nagel irgendswo in einer Wand befestigt wird: so sieht man leicht, daß diese Maschine alsdenn zum Gebrauche allenthalben viel leichter und bequemer angebracht werden kann. Indessen können jezt die Theile des Taues AD und BE doch nicht mit einander parallel gehen. Dieser Umstand aber hat, wie in der Folge gewiesen wird, auf das Vermögen der Kraft einen viel zu geringen Einfluß, als daß man nicht diese Einrichtung, der damit verbundenen grossen Bequemlichkeit wegen, im gemeinen Leben allgemein hätte annehmen und einführen sollen.

§. 32.

Auf eben die Art aber kann man auch noch mehrere Rollen, sowohl in dem einen festhangenden, als in dem andern Kloben, welcher mit der daran befestigten Last in die Höhe oder seitwärts fortgezogen wird, entweder neben oder unter einander dergestalt anbringen, daß, wenn ein Tau an dem einen Kloben, wie vorher, befestigt, und um alle Rollen, wie die 14ten und 15ten Figur vorstellen, herumgeführt wird, und nun die Kraft an dem andern Ende des Taues zieht, alsdenn alle Rollen in beyden Kloben sich auf einmal mit einander herumbewegen müssen:

so nennt man dieses Werkzeug einen Kloben- oder Flaschenzug.

Soll das Tau an dem Kloben, woran die Last angebracht ist, befestigt seyn, und also zuerst um eine Rolle des Klobens der Kraft gehen: so muß eine Rolle mehr im Kloben der Kraft, wie in dem andern Kloben seyn. Wird aber das Tau an dem Kloben der Kraft befestiget: so müssen in beyden Kloben gleich viele Rollen seyn.

Es lassen sich übrigens mehrere Rollen noch auf verschiedene andere Arten mit einander verbinden. So ist z. E. eine Verbindung von 3 Rollen, wie die 16ten Figur zeigt, auf Schiffen sehr im Gebrauche.

4. Erklärung der schiefliegenden Fläche, (§. 33-35).

§. 33.

Eine ebene Fläche, welche mit dem Horizonte einen schiefen Winkel macht, nennt man eine schiefliegende Fläche (planum inclinatum). Eine solche schiefliegende Fläche ist z. B. eine jede Auffarth (Appareille) am Walle.

Wenn eine schiefliegende Fläche nach der Länge bis zu ihrer horizontalen Grundfläche durchschnitten wird: so ist der Durchschnitt (Profil) ein rechtwink-

lichter

lichter Triangel. Man stellt daher auch, zur Betrachtung der Eigenschaften und des mechanischen Vermögens einer schiefliegenden Fläche, dieselbe immer blos durch einen rechtwinklichten Triangel ABC (fig. 17) vor; und alsdenn ist die Hypothenuse AC die Länge der schiefliegenden Fläche; der horizontalgehende Kathete BC die Länge der Grundfläche derselben, und der verticale Kathete AB wird endlich die Höhe der schiefliegenden Fläche genannt.

§. 34.

Auf einer ganz ebenen oder vollkommen glatten schiefliegenden Fläche kann eine Last in Gestalt einer Kugel, wie die Erfahrung lehrt, nicht still liegen; sondern sie muß herunterrollen, wenn sie nicht von einer hinlänglichen Kraft aufgehalten wird. Indessen wird die Kraft Q (fig. 18), welche etwa nach der Richtung DE an der Mitte der Last in D zöge, wie ebenfalls ein jeder aus der Erfahrung leicht weiß, nicht der Schwere der ganzen Last gleich seyn dürfen, um sie auf der schiefliegenden Fläche ruhend zu erhalten; anstatt, daß die Kraft P, welche an der Last in F nach der Richtung FG zöge, um sie ohne die schiefliegende Fläche ruhend zu erhalten, der Last vollkommen gleich seyn müßte, (§. 26). Ferner wird aber auch noch die Kraft immer desto kleiner seyn können, je

je flächer die schiefliegende Fläche liegt, oder je kleiner die Höhe derselben AB in Vergleich mit der Länge AC ist. Die schiefliegende Fläche trägt dennoch gleichsam einen grössern oder kleinern Theil der Last, je nachdem jene mehr oder weniger flach liegt; und eine kleinere Kraft Q wird also auch einer grössern Last I auf einer schiefliegenden Fläche nicht nur das Gleichgewicht halten, sondern sie auch leichter nach der Richtung DE über dieselbe in die Höhe ziehen können, als wenn sie von der Kraft P nach der Richtung FG heraufgezogen werden sollte, und es ist also die schiefliegende Fläche eine Maschine, (§. 2).

§. 35.

Wenn aber nun die Last bey einer schiefliegenden Fläche würklich in Bewegung gesezt, oder über dieselbe hinaufgezogen werden soll: so bewegen Kraft und Last sich doch wohl hier gleich geschwind? So gehen z. E. die Pferde mit dem Wagen, den sie über die Auffarth auf den Wall hinaufziehen, gleich geschwind; und es kann also hier wohl nicht die grössere Geschwindigkeit der Kraft die Ursache der Vergrösserung derselben seyn?

Man erwäge indessen nur, daß, wenn eine Kraft die Last über die schiefliegende Fläche von C bis

nach

nach A hinaufzieht, die Last alsdenn eigentlich seitwärts horizontal von C bis B fortgeführt, und nur von B bis A vertical in die Höhe gebracht wird. Eine Last aber seitwärts horizontal fortzubringen, wird eigentlich gar keine Kraft erfordert; und die Kraft darf sich also nur bemühen, die Last von B bis A in die Höhe zu ziehen, und der Raum, den die Last durchläuft, ist also nur die Höhe AB. Die Kraft aber geht die ganze Länge der schiefliegenden Fläche AC durch; und es verhält sich demnach die mechanische Geschwindigkeit der Kraft zur Geschwindigkeit der Last, wie die Länge der schiefliegenden Fläche, zur Höhe derselben; und es ist daher auch hier die Ursache der Vermehrung der Kraft in der grössern Geschwindigkeit derselben zu suchen.

Wenn übrigens nachher das Vermögen der schiefliegenden Fläche genauer untersucht und bestimmt wird: so wird auch erhellen, daß bey derselben ein Hebel sich befinde.

5. Erklärung der Schraube, (§. 36-38).

§. 36.

Die schiefliegende Fläche erhält im gemeinen Leben, wenn sie unter gewissen besondern Umständen angebracht wird, auch besondere Namen.

Wenn

Wenn z. E. eine schiefliegende Fläche nicht in gerader Linie fortgeht, sondern um eine cylindrische Welle herumgeführt wird: so entsteht eine Schraube (fig. 19).

Die Welle, warum die schiefliegende Fläche herumgeht, wird die Spindel der Schraube genannt; und wenn die schiefliegende Fläche einmal um die Spindel herumgeführt worden ist: so nennt man dieses einen Schraubengang.

§. 37.

Bey einer Schraube aber muß man freylich die eigentliche Schraube AB von dem sogenannten Schraubenmütterchen CD (fig. 19) unterscheiden. Bey jener befinden sich die Schraubengänge ausserhalb der Spindel um dieselbe herum; bey diesem aber sind die Schraubengänge innerhalb eines hohlen Cylinders dergestalt eingeschnitten, daß die Schraubengänge einer eigentlichen Schraube genau darin einpassen, und darin eingeschroben werden können.

§. 38.

Nicht immer wird indessen ein Schraubenmütterchen zum Gebrauche einer eigentlichen Schraube erfordert; sondern man bedient sich oft sehr vortheilhaft der eigentlichen Schraube, ein Stern- oder

Kamm-

Kammrad zu bewegen (fig. 20), und alsdenn ist es eine Schraube ohne Ende.

6. Erklärung des Keils, (§. 39-40).

§. 39.

Ferner gehört zu den schiefliegenden Flächen der Keil, dessen man sich in gemeinen Leben vielfältig zur Trennung des Zusammenhanges der Theile fester Körper bedient.

Der Durchschnitt eines Keils quer über denselben und nach der Länge desselben herunter ist ein gleichschenklichter Triangel (fig. 21), und alsdenn wird die Grundlinie des Triangels AB die Dicke, die perpendiculaire Höhe CD aber die Länge des Keils genannt; und die beyden gleichen Seiten AC und BC sind Durchschnitte von 2 schiefliegenden Flächen, deren Grundflächen, wovon die Länge des Keils CD ein Durchschnitt ist, mit einander zusammen verbunden sind.

§. 40.

Man bedient sich des Keils im gemeinen Leben sehr häufig; denn so sind, z. E. Nägel, Messer, Scheeren, Aexte, Meissel, und überhaupt alle Werkzeuge, die man zum Zertheilen und Spalten der Körper gebraucht, nichts anders alls Keile.

Wenn

Wenn übrigens nachher erst das mechanische Vermögen der schiefliegenden Fläche überhaupt ausgemacht und genau bestimmt seyn wird: so wird es sehr leicht seyn, alsdenn davon die Anwendung auf die Schraube und den Keil zu machen.

§. 41-77. Bestimmung verschiedener Begriffe, und Erklärung verschiedener Sachen, worauf die weitere Abhandlung der Statick beruht.

§. 41.

Diese bisher erklärten Maschinen sind alle diejenigen, welche man mit dem Namen der einfachen Maschinen zu benennen pflegt. Bevor nun aber das mechanische Vermögen sowohl einer jeden derselben für sich besonders, als mehrerer in Verbindung mit einander wirkenden Maschinen näher untersucht und genau bestimmt werden kann, müssen jezt noch erst verschiedene Begriffe näher bestimmt, und andere Sachen, worauf diese Bestimmung beruht, erwogen und abgehandelt werden.

1. Bestimmung der Richtungslinie fallender Körper, und die daraus folgende bestimmte Erklärung der Schwere, (§. 42-44).

§. 42.

Wenn man demnach zuvörderst die Richtung der Körper, nach welcher sie auf andere Körper drücken, oder in welcher sie sich ihrer Schwere nach, wie oben (§. 8) gezeigt worden ist, allenthalben in der ganzen Welt von selbst gegen die Erde zu bewegen, oder fallen, wenn nichts diese Bewegung hindert, näher untersucht und betrachtet: so findet man erstlich, daß alle Körper, welche neben einander auf die Erde fallen, so viel man auf das allergenaueste wahrnehmen kann, mit einander parallel gehen; oder wenn man die fallenden Körper mit Fäden an einen Stab bindet, und daran herabhangen läßt: so gehen diese Fäden, als die Richtungslinien der daran hangenden oder gleichsam fallenden Körper, wenn sie erst still hangen, dem genauesten Anscheine nach parallel.

§. 43.

Ferner findet man ebenfalls nach den genauesten Beobachtungen, daß diese Fäden oder Richtungslinien der fallenden Körper, alle senkrecht auf der Ober-

fläche eines stillstehenden Wassers stehen. Die Oberfläche eines stillstehenden Wassers aber, und überhaupt eine jede Fläche, welche mit der Oberfläche eines stillstehenden Wassers parallel geht, nennt man eine horizontale Fläche; und eine jede Linie in derselben eine Horizontallinie.

Nach mathematischen geographischen Gründen aber ist die Erde eine Kugel; und die Oberfläche eines stillstehenden Wassers, oder überhaupt eine jede begränzte horizontale Fläche ist also keine Ebene, sondern ein Theil einer krummen Kugelfläche. Und eben so ist eine begränzte Horizontallinie keine gerade Linie, sondern ein Theil einer grösten Peripherie der Erdkugel, oder ein Zirkelbogen, der gleichsam aus dem Mittelpuncte der Erde beschrieben worden ist. Wenn z. E. der Zirkel (fig. 22) einen grösten Durchschnitt der Erde vorstellt: so ist der Bogen AB eine Horizontallinie.

§. 44.

Eine gerade Linie CD (fig. 22) aber, welche die Horizontallinie AB nur in einem einzigen Puncte E berührt, und also ein Tangens der eigentlichen oder wahren Horizontallinie AB ist, nennt man zum Unterschiede derselben eine scheinbahre Horizontallinie; und wenn alsdenn ein Körper, etwa von F

bis in E herabfällt: so steht die Richtungslinie EF auf der scheinbahren Horizontallinie CD in dem Berührungspuncte E perpendiculair. Ein Radius der Erde GE aber, welcher nach dem Berührungspuncte E des Tangenten CD hingeht, steht ebenfalls auf dem Tangenten perpendiculair; und die Richtungslinie eines fallenden Körpers EF macht also mit dem Radius der Erde EG, welcher nach dem Puncte, worin der Körper auf die Erde fällt, hingezogen werden kann, eine gerade Linie aus; oder die Richtungslinie, nach welcher ein Körper fällt, geht, wenn sie verlängert wird, nach dem Mittelpuncte der Erde hin, und man kann also auch die Schwere für eine Eigenschaft der Körper erklären, wodurch sie gegen den Mittelpunct der Erde getrieben werden.

2. Erklärung der Richtungslinie der Kräfte bey Maschinen, (§. 45-46).

§. 45.

In der Folge wird erhellen, daß das Vermögen der Kraft bey einer Maschine zum Theil von der Richtung abhängt, in welcher sie an der Maschine wirket oder ziehet. Bey Betrachtung einer Maschine und bey Beurtheilung ihrer Wirkung muß man das

her immer zuerst untersuchen, nach welcher Richtung die Kraft zieht, und sich wirklich fortbewegt, oder fortbewegen würde, wenn nichts die Bewegung hinderte; und eine gerade Linie also, welche die Richtung dieser Bewegung bestimmt, nennt man die Richtungs- oder Directionslinie der Kraft.

§. 46.

Man sieht leicht, daß eine Kraft nach sehr verschiedenen Richtungen, und also unter sehr verschiedenen Winkeln an einer Maschine ziehen kann. So kann z. B. die Direction der Kraft in B am Hebel AB (fig. 23) sowohl BD oder BF, als BE seyn.

Wenn aber ein lebloser Körper oder ein gewisses Gewicht als Kraft, blos durch seine Schwere, unmittelbar an einer Maschine, wie nach der Richtung BE wirket: so ist die Directionslinie immer eine gerade Linie, welche von dem Körper perpendiculair auf den Horizont herabgefället, oder nach dem Mittelpuncte der Erde hingezogen wird. Nur ist alsdenn die Frage, von welchem Puncte in der Oberfläche des Körpers man sich die Directionslinie desselben, nach dem Mittelpuncte der Erde hingezogen gedenken muß?

3. Erklärung der Grundfläche eines Körpers.

§. 47.

Wenn ein Körper auf der Erde oder auf sonst etwas still liegt: so nennt man entweder die ganze Seite des Körpers, oder nur einen Theil dieser Seite, womit er die Fläche, worauf er liegt, unmittelbar berührt, **die Grundfläche** desselben; und man sagt, daß der Körper von dem, worauf er liegt, gehalten werde oder unterstüzt sey. Ruht aber ein Körper auf einzelnen mehr oder weniger spitzen Unterstützungslinien, z. E. wenn man auf den Fingerenden etwas in die Höhe hält: so ist die Fläche, welche durch gerade Linien begränzt wird, die man sich zwischen den Endpuncten der Unterstützungslinien gezogen gedenkt, **die Grundfläche des Körpers.**

4. Erklärung des Schwerpunctes der Körper, und unter welchen Umständen ein Körper ruhen oder stillliegen müsse,

(§. 48-52.)

§. 48.

Ein jeder einzelne Theil eines festen Körpers hat für sich eine Schwere, und bemüht sich beständig

dem

dem Mittelpuncte der Erde zu nähern. Indessen dürfen doch nicht alle einzelnen Theile eines Körpers, wenn derselbe still liegen soll, unmittelbar unterstüzt seyn; sondern die Erfahrung lehrt, daß ein Körper auf einer sehr kleinen horizontalen Grundfläche still liegen, ja so gar durch eine Nadelspitze, und also gleichsam durch einen festen Punct dergestalt unterstüzt werden könne, daß er nach keiner Seite wanke oder herunter falle.

§. 49.

Eine solche Unterstüzung eines Körpers kann aber ferner von allen Seiten desselben geschehen; und es ist also bald klar, daß, wenn ein Körper still liegen oder nicht herunter fallen soll, eben nicht ein einziger bestimmter Punct in der Oberfläche des Körpers unmittelbar unterstüzt werden müsse; daß aber dagegen in dem Innern des Körpers ein Punct sey, um den die ganze Masse des Körpers, sie mag durchaus von einerley, oder von verschiedenen Materien bestehen, dergestalt nach allen Seiten sich herumbefinde, daß, wenn man von diesem Puncte eine gerade Linie nach dem Mittelpuncte der Erde hingezogen sich gedenkt, und diese Linie durch den unterstüzten Punct in der Oberfläche des Körpers geht, oder bey einer grössern horizontalen Grundfläche nur innerhalb der-

selben fällt, und dieser Punct also würklich unterstüzt ist, alsdenn der Körper ruhen oder still liegen müsse.

Da es aber ferner einerley seyn muß, ob dieser Punct in dem Körper nach unten zu unterstüzt, oder auf der gerade entgegengesezten Seite nach oben zu gehalten werde: so ist ebenfalls leicht begreiflich, daß, wenn ein Körper an einer Schnur, in einem beliebigen Puncte in der Oberfläche desselben, aufgehangen wird, er alsdenn nur still hangen kann, wenn die Richtung der Schnur durch diesen Punct, und gerade nach dem Mittelpuncte der Erde hingeht.

§. 50.

Dieser Punct drückt denn auch gleichsam ganz allein mit der Schwere des ganzen Körpers auf die Unterstüzung, oder die Schnur, woran der Körper hängt, trägt in diesem einzigen Puncte die ganze Schwere des Körpers; und man kann daher immer sich die ganze Schwere eines Körpers in diesem einzigen Puncte gedenken, und annehmen, daß ausser diesem Puncte alle übrigen Theile des Körpers gar keine Schwere haben. Dieser Punct wird denn nun auch deswegen der **Schwerpunct des Körpers** genannt; und die **Directionslinie eines Körpers**, wenn derselbe als eine Kraft blos durch seine Schwere unmittelbar an einer Maschine zieht (§. 46), ist also

eine gerade Linie, welche von dem Schwerpuncte desselben perpendiculair auf den Horizont herabgefället, oder nach dem Mittelpuncte der Erde hingezogen wird.

§. 51.

Wenn man aber einen Körper auf eine Ebene legt, welche nicht horizontal, sondern eine schiefliegende Fläche ist: so kann der Schwerpunct desselben, wenn auch gleich die Directionslinie des Körpers innerhalb seiner Grundfläche fällt, und der Körper also nicht fallen, oder wie man sagt, überschlagen und herunter rollen kann, sich dennoch dem Mittelpuncte der Erde dadurch nähern, daß der Körper herunter glitscht; und dieses wird auch immer geschehen, wenn die beyden sich einander berührenden Flächen des Körpers und der unterstützenden schiefliegenden Fläche nur so glatt und eben sind, daß die Reibung derselben an einander nicht stark genug ist, das Herabglitschen zu verhindern. So wird, z. E. der Körper A (fig. 24) auf der schiefliegenden Fläche CDE herunterglitschen, der Körper B aber herunterrollen.

§. 52.

Den Schwerpunct eines Körpers hat man ehedem beständig, und noch jetzt immer vielfältig den

Mit=

Mittelpunct der Schwere eines Körpers genannt. Bey dieser sehr gebraüchlichen Benennung des Schwerpunctes muß man indessen sich doch nicht gedenken, daß der Schwerpunct ein Punct in dem Körper sey, daß, wenn man den Körper von jeder beliebigen Seite durch diesen Punct gerade zu, durch eine ebene Fläche, welche man alsdenn eine Schwerpuncts-Ebene nennen kann, durchschnitte, die beyden Theile des Körpers immer gleich schwer seyn, oder gleiches Gewicht, und folglich auch, wenn der Körper durchaus von einerley Materie ist, gleiche Grösse haben müssen; und der Schwerpunct denn auch zugleich ein Mittelpunct der Grösse des Körpers seyn müsse. Einen solchen Mittelpunct der Grösse aber giebt es, wie in der Folge (§. 64) geometrisch gezeigt wird, überhaupt nur in sehr wenigen Körpern, wenn sie auch gleich durchaus aus einerley Materie bestehen; einen Schwerpunct oder einen sogenannten Mittelpunct der Schwere aber hat ein jeder Körper, er mag gestaltet seyn, wie er will, und durchaus von einerley Materie, oder nicht seyn.

Uebrigens wird man noch nach dieser Bestimmung des Schwerpunctes leicht einsehen, daß derselbe nicht einmal immer in der festen Masse des Körpers ist, sondern ausserhalb derselben in dem leeren Raume sich befindet, der von der Masse des Körpers

ent-

entweder ganz oder zum Theil umgeben ist. So ist, z. Ex. in einer Bombe der Schwerpunct in dem innern hohlen Raume derselben; und eben so bey einem nicht beladenen Schiffe.

5. Bestimmung des Schwerpunctes bey einigen geometrischen Körpern, (§. 53-64).

§. 53.

Auf die Bestimmung des Schwerpunctes eines Körpers kommt es nicht nur in der Mechanick, sondern selbst im gemeinen Leben vielfältig sehr an. Sie dient z. Ex. zu bestimmen, ob ein schwerer Körper in einer gewissen Lage vor dem Falle sicher sey oder nicht; und ob derselbe leicht umgestossen und fortgewälzt werden könne, oder nicht. Ferner muß man das natürliche oder unnatürliche bey Posituren in Gemählden und Statüen darnach beurtheilen; und ebenfalls sieht auch jetzt ein jeder leicht die Ursache ein, warum die Menschen, und alle Kreaturen, die auf 2 Beinen gehen, platte und breite Füsse; alle 4füssige Thiere aber nicht solche Füsse haben.

§. 54.

Der Schwerpunct eines Körpers kann aber nicht bey allen Körpern im gemeinen Leben, sondern

nur bey solchen Körpern, deren Gestalt von der Beschaffenheit ist, daß der körperliche Inhalt desselben geometrisch ausgemessen werden kann, nach geometrischen und statischen Gründen vollkommen genau; bey allen übrigen Körpern aber blos durch Versuche gefunden und angegeben werden. Und selbst bey solchen geometrischen Körpern wird doch noch überdem vorausgesetzt und angenommen, daß der Körper, dessen Schwerpunct gefunden werden soll, durchaus von einerley Materie sey.

Wie denn nun der Schwerpunct bey einigen geometrischen Körpern unter diesen Bedingungen zuerst blos geometrisch und ohne statische Gründe würklich gefunden werden könne, will ich jetzt zum Beyspiel und zur Erläuterung des bisher gesagten erklären und zeigen. Die weitere Ausführung dieser Lehre ist zur Abhandlung der Statick nicht nothwendig; und beruht überdem zum Theil mit auf statischen Lehren, die noch erst vorgetragen werden sollen, und muß daher auch wenigstens bis dahin, daß diese Lehren abgehandelt worden sind, ausgesetzt werden.

§. 55.

Nicht nur mathematischen Linien und Flächen, sondern auch selbst mathematischen Körpern kann man freylich, ihrer Natur nach, kein eigenes Gewicht

bey-

beylegen, und sie können daher auch eigentlich keinen Schwerpunct haben. Indessen kann man sich gedenken, daß gleich grosse Theile von solchen Linien, Flächen und Körpern, von gleich grossen äussern Kräften, nach parallelen Richtungen unterwärts, oder nach dem Mittelpuncte der Erde fortgetrieben werden; und man kann ihnen also auch eine würkliche Schwere in allen ihren einzelnen Theilen beylegen; und sich folglich ebenfalls bey denselben einen gemeinschaftlichen Schwerpunct aller einzelnen Theile oder des Ganzen gedenken. Durch Bestimmung eines solchen Schwerpunctes aber kann man denn ferner unmittelbar den Schwerpunct in verschiedenen körperlichen, und folglich würklich schweren Linien, Flächen und Körpern finden. Wenn z. B. der Schwerpunct in einem Triangel bestimmt wird: so wird dadurch unmittelbar der Schwerpunct in einem 3eckigten Prisma, dessen Grundfläche ein Triangel ist, gefunden; und eben so wird daraus die Bestimmung des Schwerpunctes in einer 3eckigten Pyramide, weil deren Grundfläche nicht nur ein Triangel ist, sondern weil alle Durchschnitte, welche in derselben parallel mit der Grundfläche gemacht werden können, ebenfalls Triangel sind, hergeleitet.

§. 56.

Vom Schwerpuncte einer geraden Linie, und eines geradestehenden Cylinders.

Der Schwerpunct einer geraden Linie AB (fig. 25) liegt in der Mitte derselben C.

Man gedenke sich nur die Linie in diesem Puncte C unterstützt: so ist kein Grund vorhanden, warum die eine Hälfte mehr Kraft, wie die andere haben sollte, sich herunter zu bewegen, und die andere Hälfte dagegen in die Höhe zu heben; und eine gerade Linie wird also in einer jeden sowohl schiefen (fig. 26) als horizontalen (fig. 25) Lage, worin sie gebracht wird, wenn sie nur in ihrer Mitte unterstützt ist, ruhen oder still stehen müssen.

Einen Cylinder kann man ferner hier als eine würklich schwere gerade Linie ansehen; von demselben muß daher gleichfalls eben dieses gelten, und dessen Schwerpunct muß insonderheit auch in der Mitte der geraden Linie zwischen den Mittelpuncten seiner beyden Grundflächen, und also bey einem geraden Cylinder in der Mitte seiner Axe liegen.

§. 57.

Vom Schwerpuncte eines Parallelogramms.

Der Schwerpunct eines sowohl schiefwinklichten, als rechtwinklichten Parallelogramms ABCD (fig.

(fig. 27) wird gefunden, wenn man alle Seitenlinien desselben halbirt, und alsdenn zwischen 2 und 2 einander gegen über liegenden Theilungspuncten die geraden Linien EF und GH ziehet: so ist der Punct I, worin diese beyden Linien sich durchschneiden, der Schwerpunct des Parallelogramms.

Man kann sich vorstellen, daß das Parallelogramm aus unendlich vielen gleich langen, und mit AB parallel gehenden geraden Linien ab, cd, u. s. w. bestehe; oder, wie man sagt, die Elemente des Parallelogramms ABCD sind gleich lange mit AB parallel gehende gerade Linien ab, cd, u. s. w. Diese Elemente aber werden nun alle durch die Linie EF halbirt; und es muß daher der Schwerpunct des Parallelogramms in dieser Linie seyn, oder die Linie EF ist, wie man sagt, eine Schwerpunctslinie des Parallelogramms. Eben so ist aber auch von der andern Seite GH eine Schwerpunctslinie, welche alle mit AD parallel gehenden Elemente des Parallelogramms fg, hi, u. s. w. halbirt; und es ist also der Schwerpunct des Parallelogramms in I, wo die beyden Schwerpunctslinien EF und GH sich durchschneiden.

§. 58.

Vom Schwerpuncte eines Parallelopipedums.

Ein Parallelopipedum besteht gleichsam aus unendlich vielen mit den Grundflächen parallel gehenden congruenten Durchschnitten, oder es sind die Elemente eines Parallelopipedums lauter congruente Parallelogrammen: der Schwerpunct eines Parallelopipedums muß also, wie beym Cylinder, in der Mitte der geraden Linie liegen, welche zwischen den Schwerpuncten der beyden Grundflächen gezogen werden kann.

§. 59.

In der Geometrie wird gewiesen, daß eine jede Linie, welche in einem Parallelogramm ABCD (fig. 27) von einer Seite zur andern durch den Punct I gezogen wird, z. E. die Linie LK, durch diesen Punct halbirt werde, und daß ferner eine solche Linie das Parallelogramm, so wie ein Diameter den Zirkel in 2 gleiche und ähnliche, oder congruente Theile theile: es ist daher auch leicht einzusehen, daß der Schwerpunct eines Cylinders sowohl, als der Schwerpunct eines Parallelopipedums, in allen möglichen ebenen Durchschnitsflächen liegen müsse, wodurch diese Körper in 2 gleiche und ähnliche, und folglich auch in 2 gleich schwere Theile getheilt werden;

den; und daß also der Schwerpunct eines Parallelopipedums oder eines Cylinders zugleich der Mittelpunct der Grösse in diesen Körpern seyn müsse.

§. 60.

Vom Schwerpuncte eines Dreyeckes.

Ein Dreyeck ABC (fig. 28) besteht gleichsam aus unendlich vielen geraden Linien, oder die Elemente des Dreyeckes sind gerade Linien.

Wenn hierauf die Seite, mit welcher man sich die Elemente des Dreyeckes parallel gehend gedenkt, z. E. BC in 2 gleiche Theile getheilt, und alsdenn aus der Spitze des Dreyeckes A eine gerade Linie AD nach dem Theilungspuncte D der getheilten Seite BC hingezogen wird: so theilt diese Linie alle möglichen Elemente des Triangels in 2 gleiche Theile. Es muß also der Schwerpunct des Triangels in dieser Linie liegen, oder es ist die Linie AD eine Schwerpunctslinie des Triangels ABC. Gedenkt man sich aber ferner die Elemente des Triangels mit der Seite AC parallel gehend: so wird ebenfalls die Linie BE, welche die Seite AC halbirt, auch eine Schwerpunctslinie des Triangels seyn müssen; und der Schwerpunct des Triangels ist also in dem Durchschnitspuncte dieser beyden Schwerpunctslinien F.

§. 61.

Wenn auf die eben angezeigte Art in einem Triangel ABC eine Schwerpunctslinie AD (fig. 29) bestimmt wird: so ist die Entfernung des Schwerpunctes von der Spitze des Triangels immer $\frac{2}{3}$ dieser Linie, oder $\frac{1}{3}$ derselben von der Grundlinie; das ist

$AF = \frac{2}{3} AD$,

oder $DF = \frac{1}{3} AD$.

Man bestimme auch noch, wie vorher, die Schwerpunctslinie BE, und ziehe alsdenn die Linie ED; und da sich nun verhält:

$EC : AC = CD : BC$;

oder $EC : CD = AC : BC$,

und der W. $x = x$ ist:

so ist $\Delta EDC \sim \Delta ABC$ (§. 153 der Geom.),

und es verhält sich also:

$EC : ED = AC : AB$,

oder $EC : AC = ED : AB$.

Es ist aber $EC = \frac{1}{2} AC$:

folglich auch $ED = \frac{1}{2} AB$.

Weil aber $\Delta EDC \sim \Delta ABC$ ist:

so ist auch der W. $n = y$,

und also ED ‡ AB,
wie auch $s = u$, und $r = o$; } (§. 49 der Geom.)

folglich $\Delta EDF \sim \Delta BAF$;

und es verhält sich demnach:

DF : DE = AF : AB,

oder DF : AF = DE : AB.

Es ist aber DE = $\frac{1}{2}$ AB;

---

folglich auch DF = $\frac{1}{2}$ AF,

---

und also ist AF = $\frac{2}{3}$ AD,

oder DF = $\frac{1}{3}$ AD. W. Z. E. W.

Bey einem gleichschenklichten Triangel liegt also der Schwerpunct auf $\frac{2}{3}$ der Höhe von der Spitze, oder auf $\frac{1}{3}$ derselben von der Grundlinie.

§. 62.

Vom Schwerpuncte eines 3eckigten Prismas, und einer 3eckigten Pyramide.

Ein 3eckigtes Prisma besteht gleichsam aus unendlich vielen, mit den Grundflächen parallel gehenden congruenten Triangeln: der Schwerpunct desselben muß also in der Mitte der geraden Linie liegen, welche zwischen den Schwerpuncten der beyden Grundflächen gezogen werden kann, und durch alle Schwerpuncte der erwähnten congruenten Triangeln geht.

Bey einer 3eckigten Pyramide aber sind alle Durchschnitte, welche in derselben parallel mit der Grundfläche gemacht werden können, Triangel,

welche

welche der Grundfläche und unter sich einander ähnlich sind, (§. 297 der Geom.) Ferner aber ist leicht einzusehen, daß eine gerade Linie, welche aus der Spitze der Pyramide nach dem Schwerpuncte der Grundfläche hingezogen wird, durch alle möglichen Schwerpuncte der Elemente gehen müsse. Wird nun die Pyramide in eine solche Lage gebracht, daß diese Linie genau vertical, oder verlängert nach dem Mittelpuncte der Erde hingeht, und sie alsdenn in dem Schwerpuncte der Grundfläche unterstützt wird: so wird die Pyramide ruhen müssen. Die unterstützte verticale Linie AE ist daher eine Schwerpunctslinie der Pyramide; und in derselben liegt also der Schwerpunct der Pyramide. Eine jede Seite einer 3eckigten Pyramide aber kann man zur Grundfläche der Pyramide annehmen, und daher leicht 2 verschiedene Schwerpunctslinien in einer Pyramide angeben, welche sich alsdenn in dem Schwerpuncte der Pyramide durchschneiden müssen.

Wenn z. E. in der Pyramide ABCD (fig. 30) der Schwerpunct der Grundfläche BCD in E ist: so ist AE eine Schwerpunctslinie der Pyramide; und eben so ist BF eine Schwerpunctslinie derselben, wenn F der Schwerpunct der Seite ADC ist. Und es ist also der Durchschnitspunct dieser beyden Schwerpunctslinien G der Schwerpunct der Pyramide.

§. 63.

Die Entfernung des Schwerpunctes einer 3eckigten Pyramide G von der Spitze derselben A ist immer $\frac{3}{4}$ der Schwerpunctslinie AE; und also $\frac{1}{4}$ dieser Linie von der Grundfläche der Pyramide; das ist:

$$AG = \frac{3}{4} AE,$$

oder $GE = \frac{1}{4} AE$.

Man ziehe in der Schwerpuncts-Ebene der Pyramide AHB die Linie EF; alsdenn ist nach eben den Gründen, wie vorher (§. 61),

der $\triangle$ EFH $\sim$ BAH.

Hier ist aber $FH = \frac{1}{3} AH$;

---

folglich auch $EF = \frac{1}{3} AB$.

Ferner ist auch hier $\triangle$ EGF $\sim$ $\triangle$ AGB;

---

also $EG = \frac{1}{3} AG$,

---

und folglich ist $AG = \frac{3}{4} AE$;

oder $EG = \frac{1}{4} AE$. W. Z. E. W.

Bey einer geraden 3eckigten Pyramide liegt also der Schwerpunct auf $\frac{3}{4}$ der Höhe von der Spitze, oder auf $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche.

§. 64.

Wenn hierauf bey einem gleichschenklichten Triangel ABC (fig. 31), die Höhe desselben AD

in

in 3 gleiche Theile, und dadurch der Schwerpunct des Triangels in E bestimmt wird: so ist eine Linie FG, welche parallel mit der Grundlinie BC gezogen wird, auch eine Schwerpunctslinie des Triangels, und der Triangel kann also nach keiner Seite herunterfallen, wenn er nach der Linie FG unterstützt wird. Diese Linie FG aber theilt den Triangel ABC nicht in 2 gleiche Theile; sondern das Stück nach der Spitze zu ist immer kleiner, als das Stück nach der Grundlinie zu; oder es ist:

$$\Delta\, AFG < FGCB.$$

Beweis.

Es sey z. E. die Grundlinie BC $= a$, und die Höhe AD $= b$: so ist AE $= \frac{2}{3} b$, DE $= \frac{1}{3} b$, und FG $= \frac{2}{3} a$; folglich ist:

$$\Delta\, AFG = \frac{2\,ab}{9} = \frac{4\,ab}{18}, \text{ (§. 117 der Geom.)},$$

und FGCB $= \frac{5\,ab}{18}$, (§. 119 der Geom.);

folglich verhält sich:

$$\Delta\, AFG : FGCB = \frac{4\,ab}{18} : \frac{5\,ab}{18},$$

$$\text{und das ist } = 4 : 5;$$

und also sind die beyden Theile des ganzen Triangels ABC nicht einander gleich, sondern es ist:

$$\Delta\, AFG < FGCB. \text{ W. Z. E. W.}$$

Bey

Bey einem gleichseitigen Triangel sey ferner eine jede Seite = a; und wenn alsdenn eine Seite zur Grundlinie des Triangels angenommen, und der Triangel durch eine Schwerpunctslinie parallel mit der Grundlinie in 2 Theile getheilt wird: so ist

das Stück nach der Spitze zu $= \frac{4 a^2 \sqrt{3}}{36}$,

und das Stück nach der Grundlinie zu $= \frac{5 a^2 \sqrt{3}}{36}$.

folglich verhalten sich auch hier diese beyden Theile zu einander, wie 4 zu 5; und sind demnach ebenfalls nicht einander gleich.

Eben dieses läßt sich nun auch von einem jeden ungleichseitigen Triangel zeigen; und eine gerade Linie also, welche einen Triangel parallel mit der Grundlinie in 2 gleiche Theile theilen soll, muß demnach unterhalb dem Schwerpuncte E, etwa in fg gezogen werden. Da nun die beyden Schwerpunctslinien AD und BH auch den Triangel in 2 gleiche Theile theilen; die 3 Linien AD, BH und fg aber keinen Punct gemeinschaftlich haben: so erhellet jetzt daraus ganz deutlich, daß ein Triangel, und folglich auch ein 3eckigtes Prisma keinen Mittelpunct der Grösse haben könne.

Auf eben die Art läßt sich auch leicht beweisen, daß eine Durchschnits-Ebene, welche in einer jeden

zeckigten Pyramide überhaupt, und folglich auch selbst in dem regulairen Tetraedron durch den Schwerpunct parallel mit der Grundfläche gemacht wird, und also eine Schwerpuncts-Ebene ist, die Pyramide nicht in 2 gleiche Theile theile, und dieselbe daher auch keinen Mittelpunct der Grösse habe *).

Um

*) So gewis es demnoch jezt auch ist, daß die mehresten Figuren und Körper keinen Mittelpunct der Grösse, das ist, keinen Punct haben, der in allen möglichen Durchschnits-Linien einer Figur, und in allen möglichen Durchschnits-Ebenen eines Körpers sich befindet, wodurch die Figur oder der Körper in 2 gleich grosse Theile getheilt wird: so haben dennoch sehr viele der neuere geschicktesten und berühmtesten Mathematicker sich hierin geirret, und überhaupt vielfältig gar zu unbestimmte Begriffe, und zum Theil ganz falsche Sätze vom Schwerpuncte und dem Mittelpuncte der Grösse angegeben. Blos ein Paar dieser Schriftsteller will ich zur Erläuterung und zum Beweise hiervon anführen.

So sagt z. B. der berühmte Unterberger in seiner Mechanick §. 158: " der Mittelpunct der Schwere " eines Körpers ist ein gewisser Punct, um welchen " die Masse eines Körpers dergestalt ausgetheilet ist, " daß, wenn man denselben mit einer ge- " raden Fläche durch diesen Punct, nach " was immer für einer Richtung durch- " schneidet, beyde Theile allemal gleiche " Schwere bekommen." Ferner sagt er §. 170: " der Mittelpunct der Grösse eines regelmässigen

" regu-

Um indessen einzusehen, wie es dennoch möglich sey, daß der kleinere Triangel AFG dem grössern Vierecke BFGC das Gleichgewicht halten könne, erwäge man nur, daß, wenn der Triangel ABC nach der Schwerpunctslinie FG unterstützt wird, alsdenn die beyden Theile desselben, der Triangel AFG und das Viereck BFGC, jedes für sich besonders ihren Schwerpunct haben, und in demselben mit ihrer ganzen Schwere wirken. Man kann sich also hier zwischen diesen beyden Schwerpuncten, einen waagförmi-

" (regulairen) Polygons sey dessen Mittelpunct, und " der Mittelpunct der Grösse eines Prismas sey in " der Mitte seiner Axe," da doch weder ein gleichseitiger Triangel, noch ein 3eckigtes Prisma einen Mittelpunct der Grösse haben. Und eben so unrichtig ist es deswegen auch, wenn er (§. 176) sagt: " daß die Mittelpuncte der Grösse und Schwere in " allen regelmässigen Polygonen; in Körpern, so " durch regelmässige und einerley Vielecke eingeschlos- " sen sind, und in Prismen einerley sind."

Der gelehrte Mathematiker Lorenz sagt ferner in 2ten Theile seiner Mathematick §. 98 eben so unrichtig: "Eine jede Ebene, die einen gleichför- " förmig dichten Körper halbirt, ist eine Ebene der " Schwere (Schwerpuncts-Ebene), und eine Linie, " die eine Ebene halbirt, ist ein Durchmesser der " Schwere (Schwerpuncts-Linie); und folglich ist " der Mittelpunct der Grösse auch der Mittelpunct " der Schwere."

förmigen mathematischen Hebel gedenken, dessen Ruhe- oder Bewegungspunkt in dem Schwerpuncte des Triangels ABC ist, dessen beyden Arme aber die Entfernungen der besondern Schwerpuncte des Triangels AFG, und des Viereckes BFGC von dem Schwerpuncte des ganzen Triangels ABC sind; und wobey also an den beyden Enden des Hebels die Schwere des Triangels AFG und des Viereckes BFGC einander entgegen wirken, und sich das Gleichgewicht halten. Da nun der Schwerpunct des Triangels AFG weiter von dem Puncte der Bewegung entfernt ist, als der Schwerpunct des Viereckes BFGC: so ist dies der Grund (§. 17), warum der kleinere Triangel AFG dem grössern Vierecke BFGC das Gleichgewicht halten könne.

6. Was die Entfernung der Kräfte bey Maschinen sey, (§. 65-67).

§. 65.

Nach dem oben (§. 13) bemerkten Grundgesetze der Natur scheint es freylich ausgemacht zu seyn, daß je länger der Arm des Hebels, woran die Kraft zieht, im Verhältnisse mit dem Arme der Last ist; und also überhaupt in weiter von dem Bewegungspuncte einer Maschine eine Kraft angebracht wird,

oder kurz, je grösser die Entfernung der Kraft von dem Bewegungspuncte ist, desto grösser wird auch die Vermehrung der Kraft seyn. Indessen kommt hierbey doch auch die Richtung, nach welcher eine Kraft zieht, wie ebenfalls vorhin (§. 45) angemerkt worden ist, sehr mit in Betracht. So kann man z. E. durch Versuche sich bald überzeugen, daß eine Kraft in B (fig. 23) weit mehr nach der Richtung BE, als nach der Richtung BD oder BF vermag; und je mehr überhaupt hier die Richtung der Kraft von der Richtung BE nach der einen oder der andern Seite abweicht, desto geringer wird auch das Vermögen derselben seyn.

Ob übrigens die Kraft an einem etwas längern oder kürzern Taue ziehe, kann auf das Vermögen der Kraft keinen Einfluß weiter haben. So macht es z. E. keinen Unterschied, ob die Kraft, welche in B nach der Richtung BE zieht, in E, oder in M, oder in N wirke; und ob ferner die Kraft, welche nach der Richtung BD zieht, in D, oder in H, oder in I angebracht werde.

§. 66.

Die eigentliche Entfernung der Kraft von dem Bewegungspuncte der Maschine ist daher nicht immer die ganze Länge der Linie, woran die Kraft bey der

Ma-

Maschine unmittelbar zieht; sondern sie ist die Perpendiculairlinie, welche aus dem Bewegungspuncte der Maschine auf die Directionslinie der Kraft gefället wird. So ist z. E. am horizontalen Hebel AB (fig. 23) die Entfernung der Kraft E der ganze Arm des Hebels BC, weil derselbe mit der Directionslinie der Kraft BE einen rechten Winkel macht; die Entfernung der Kraft D aber ist die Perpendiculairlinie CP, und eben so ist die Entfernung der Kraft F die Perpendiculairlinie CG.

Da nun aber BC grösser ist sowohl wie CP, als wie CG: so ist bald klar, daß eine Kraft die gröste Entfernung, und also auch das gröste Vermögen habe, wenn sie unter einem rechten Winkel an der Maschine zieht; und daß das Vermögen einer Kraft immer mehr und mehr abnehme, je mehr der Winkel, den die Richtungslinie mit der Maschine macht, von dem rechten Winkel abweicht.

Bey der Betrachtung einer Maschine muß man daher immer zuerst erwägen, in welcher Richtung die Kraft ziehe. Darnach muß man die Entfernung der Kraft bestimmen; und alsdann erst kann nach Beschaffenheit dieser beyden Stücke der Vortheil der Kraft, den man durch den Gebrauch der Maschine erhält, gefunden und bestimmt werden.

§. 67.

§. 67.

Erklärung eines Winkelhebels.

Wenn man jetzt aber noch ferner erwägt, daß eine Kraft, welche z. E. am Hebel AB (fig. 23) in B nach der Richtung BF zieht, eigentlich nur die Entfernung CG habe, und daß deswegen das Vermögen derselben nach dieser Entfernung bestimmt werden müsse: so ist leicht zu begreiffen, daß hier anstatt des Armes BC, eben so gut eine gerade unbiegsame Linie CG hätte seyn können; und wenn alsdenn eine Kraft in G nach der Richtung GF zöge: so müste dieselbe eben so viel Vermögen haben, als wenn sie in B ebenfalls nach der Richtung BF ziehen würde. Die beyden Arme eines Hebels dürfen also nicht immer zusammen eine gerade Linie ausmachen, sondern können gerne einen Winkel bilden, dessen Scheitelpunct der Bewegungspunct ist; und ein solcher Hebel, den man zum Unterschiede einen Winkelhebel nennen kann, wird eben die Vermehrung der Kraft geben, wenn nur die Kraft an demselben unter einem rechten Winkel, und also mit der grösten Entfernung zieht. So wird z. E. an dem Winkelhebel ACD (fig. 32) eine Kraft in D, wenn sie nach der Richtung DE zieht, eben so viel vermögen, und eben eine so grosse Last in A im Gleich-

gewichte

gewichte erhalten können, als wenn sie am Hebel AB in B nach der Richtung BF ziehen würde.

7. Abhandlung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte, (§. 68-77).

§. 68.

Endlich ist noch übrig zu untersuchen und zu bestimmen, wie viel 2 oder mehrere Kräfte, sowohl wenn sie einander gleich, als wenn sie ungleich sind, vermögen und ausrichten können, wenn sie entweder einander gerade entgegen, oder nur unter einem gewissen Winkel an einer Last ziehen.

Wenn zuvörderst 2 gleiche Kräfte A und B (fig. 33) an einer Last C noch gerade entgegen gesetzter Richtung ziehen: so erfolgt keine Bewegung, wenn gleich eine jede Kraft für sich im Stande gewesen seyn würde, die Last fortzuziehen.

Ziehen aber 2 ungleiche Kräfte E und F (fig. 34) ebenfalls nach gerade entgegen gesetzter Richtung an einer Last G, und die grössere Kraft F ist nur nicht so viel grösser, wie die kleinere Kraft E, daß sie diese mit samt der Last G überwinden kann; so erfolgt ebenfalls noch keine Bewegung; sondern erst alsdenn, wenn die grössere Kraft F stark genug ist, beydes die entgegen wirkende Kraft E und die

Last

Last G zu überwinden: so wird die Last sich nach der Richtung fortbewegen, nach welcher die grössere Kraft zieht.

§. 69.

Wenn ferner eine jede von 2 gleichen Kräften P und Q (fig. 35) für sich allein im Stande wäre, eine Last C, gerade nach der Richtung, worinn sie zögen, fortzuziehen; sie nun aber beyde zugleich unter einem Winkel x an der Last ziehen: so verliehren sie allerdings beyde an ihrem Vermögen, die Last fortzuziehen, und zwar je grösser der Winkel x ist, desto grösser ist auch dieser Verlust. Ja der Winkel x kann gar so groß seyn, daß sie beyde zusammen nicht im Stande sind, die Last zu bewegen.

Wenn indessen der Winkel x nicht grösser ist, als daß sie noch die Last fortziehen können: so wird doch die Last jetzt weder nach der Richtung AC, nach welcher die Kraft P zieht, noch nach der Richtung BC, nach welcher die Kraft Q zieht, fortgezogen werden; sondern die Richtungslinie CD, nach welcher die Last sich würklich fortbewegt, wird gleich weit von beyden Richtungen AC und BC abweichen, und folglich den Winkel x halbiren.

§. 70.

Wenn aber endlich 2 ungleiche Kräfte P und Q (fig. 36), von denen abermal eine jede für sich allein stark genug ist, die Last C fortzuziehen, unter einem Winkel x an der Last gemeinschaftlich ziehen: so kann ebenfalls hier der Winkel so groß, und dabey das Verhältniß der Kräfte von der Beschaffenheit seyn, daß sie beyde zusammen die Last gar nicht bewegen können. Ist aber der Winkel x noch klein genug, daß sie im Stande sind, die Last fortzuziehen: so wird doch jetzt die Directionslinie der Last CD nicht den Winkel x halbiren, sondern sich mehr nach der Directionslinie der grössern Kraft hinneigen, oder mit derselben, einen kleinern Winkel y, und mit der Directionslinie der kleinern Kraft einen grössern Winkel o machen.

Alles dieses ist leicht einzusehen; es frägt sich aber jetzt, wie werden denn diese Winkel sich gegen einander verhalten? Wird vielleicht der grössere Winkel o, etwa 3 oder 4 mal grösser, wie der kleinere Winkel y seyn, wenn die grössere Kraft 3 oder 4 mal grösser, als die kleinere Kraft ist; oder wird der Winkel x nach einem andern Gesetze getheilt?

§. 71.

Dieses zu untersuchen, merke man nur zuvörderst, daß das Verhältniß 2er ungleichen Kräfte, so wie in Zahlen, auch in Linien ausgedrückt werden könne. Gesetzt z. B. 2 ungleiche Kräfte P und Q (fig. 37) verhielten sich, wie 4 zu 5: so setze man nur auf die Directionslinie AC der kleinern Kraft Q eine beliebige Länge 4 mal, und dieselbe Länge auf die Directionslinie BC der grössern Kraft P, 5 mal ab: so verhält sich:

Die Kraft Q : Kraft P = AC : BC; oder, wenn die Kraft Q die Last C in einer gewissen Zeit von C bis A fortzubringen im Stande wäre: so würde die Kraft P sie in eben der Zeit bis B fortgezogen haben.

§. 72.

Gesetzt nun wieder, das Verhältniß zweier ungleichen Kräfte wäre etwa wie AC zu BC (fig. 37), und sie wären zusammen so groß, daß sie, wenn sie beyde unter dem Winkel x an der Last zögen, sie noch die Last fortziehen könnten: so läßt sich durch Beyspiele im gemeinen Leben, deren ich 2 aus der Mechanick des Herrn Professors Büsch anführen will, leicht zeigen, nicht nur nach welcher Richtung die Last wirklich fortgehen, und wie also der Winkel x

durch

durch die Richtungslinie der Last getheilt werde, sondern auch welchen Weg die Last in der ganzen Zeit, daß die beyden Kräfte daran ziehen, zurücklegen wird; und diese Linie wird denn auch zugleich verhältnismäßig anzeigen, wie groß eine Kraft hätte seyn müssen, um allein die Last in eben der Zeit auch dahin zu bringen.

§. 73.

Es sey die Linie CB (fig. 38) eine körperliche Linie, längst welcher ein Insect mit einer gleichförmigen Bewegung fortkrieche, und also als eine Last durch ihre eigene Kräfte fortbeweget werde. Man theile hierauf die Zeit, in welcher es längst der Linie kriecht, in gewisse, etwa in 5 gleiche Theile; und es krieche also in dem ersten Theile von C bis 1; in dem 2ten von 1 bis 2 u. s. f. bis ganz nach B hin. Mitlerweise werde die Linie CB durch eine andere Kraft mit ebenfalls gleichförmiger Geschwindigkeit von C bis A parallel herunter bewegt, und folglich im ersten Theile der Zeit bis I; in dem 2ten bis II u. s. f. gebracht: alsdenn ist am Ende des ersten Theiles der Zeit der Punct 1, und mit demselben das Insect in a; am Ende des 2ten Theiles der Zeit der Punct 2 mit dem Insecte in b, und so kommt das Insect nach und nach in c, in d, und zuletzt in D.

Das Insect ist also durch seine eigene Kraft, und durch die Kraft, welche die Linie CB von C bis A fortführte, nach der Diagonallinie CD des Parallelogramms ACBD fortgerückt, welches durch die beyden Linien AC und BC, welche das Verhältnis der Kräfte ausdrücken, und durch den Winkel x, unter welchem die beyden Kräfte ziehen, bestimmt wird.

Es sey ferner ABCD (fig. 39) ein Schiff, welches in einer gewissen Zeit, mit gleichförmiger Geschwindigkeit in die Lage abcd fortbeweget wird; und in eben der Zeit gehe auf dem Schiffe ein Mann quer über demselben von A bis B. Ihn bewegen also 2 Kräfte, seine eigene und die von der Bewegung des Schiffes angenommene Kraft. Seine Bewegung fieng in A an, und hört in b auf; und er ist also eigentlich nach der Linie Ab, als der Diagonallinie des Parallelogramms AabB fortgekommen.

§. 74.

Aus diesen beyden Beyspielen erhellet jetzt ganz deutlich, wie die Directionslinie einer Last, wenn sie von 2 ungleichen Kräften unter einem bestimmten Winkel fortgezogen wird, diesen Winkel in jedem besondern Falle theilen werde.

Man drücke nur jedesmal das Verhältniß der beyden Kräfte in Linien aus, und construire aus den-

selben,

selben, und aus dem Winkel, worunter die Kräfte ziehen, ein Parallelogramm; so wird dasselbe das Parallelogramm der Kräfte (parallelogrammum virium) genannt, und die Diagonallinie in demselben ist die Richtungslinie der Last, und bestimmt, wie durch sie der Winkel, worunter die Kräfte ziehen, getheilt wird.

Es sey z. Ex. (fig. 40) das Verhältnis der beyden Kräfte Q und P durch die beyden Linien AC und BC ausgedrückt, und x sey der Winkel, unter welchem die beyden Kräfte ziehen: so ist ACBD das Parallelogramm der Kräfte, und die Diagonallinie CD ist die Richtungslinie der Last; theilt den Winkel x in die beyden Winkel u und y, und zeigt zugleich verhältnismäßig an, wie viel die beyden Kräfte AC und BC zusammen gewirkt haben; oder wie groß eine einzige Kraft hätte seyn müssen, um allein die Last in eben der Zeit von C bis D fortzubringen.

§. 75.

Hierauf verhält sich nun in dem Triangel BCD (fig. 38)

$$\text{Sin.} \angle y : \text{Sin.} \angle u = BD : BC.$$

Weil aber BC $\#$ AD,

und AC $\#$ BD geht:

so ist auch AC = BD (§. 50 der Geom.)
und der W. o = u (§. 46 der Geom.)

---

und also Sin. $<$ y : Sin. $<$ o = AC : BC.

Es wird demnach der Winkel x, unter dem zwey ungleiche Kräfte P und Q eine Last fortziehen, durch die Directionslinie der Last dergestalt in die beyden Winkel o und y zerlegt, daß sich die Sinusse dieser beyden Winkel verkehrt, wie die beyden Kräfte verhalten.

§. 76.

Weil aber ferner die Kräfte Q und P, deren Vermögen durch die Linien AC und BC ausgedrückt ist, wenn sie unter dem Winkel x ziehen, nur genau dasjenige wirken, was eine einzige Kraft, welche durch die Diagonallinie CD verhältnismäßig ausgedrückt ist, wirken würde; die Kraft CD aber die Last C nicht bewegen kann, wenn etwa die Last selbst schon im Stande ist, dieser Kraft zu widerstehen, oder wenn eine andere hinlängliche Kraft oder Hindernis gerade in dieser Richtung rückwärts, z. E. etwa in E widersteht: so werden auch die Kräfte P und Q die Last C bey eben diesem Widerstande nicht bewegen können.

§. 77.

Wenn man übrigens noch wissen will, wie viel zwey ungleiche Kräfte P und Q, wenn sie unter einem bestimmten Winkel an einer Last ziehen, wirklich vermögen: so darf man nur in dem Parallelogramm dieser Kräfte ACBD, worin alsdenn AC und BC nebst dem Winkel x bekannt sind, die Diagonallinie CD trigonometrisch berechnen.

Und auf eben die Art läßt sich denn auch leicht finden, wie viel überhaupt 3 oder 4, oder noch mehrere Kräfte zusammen vermögen, wenn sie unter verschiedenen Winkeln an einer Last gemeinschaftlich ziehen. Man bestimme nur zuerst das Vermögen zweyer solchen Kräfte; alsdenn bringe man damit die 3te Kraft zusammen, und mit dieser wieder die 4te u. s. w.

§. 78-121. Abhandlung und genaue Bestimmung des Vermögens der einfachen Maschinen.

§. 78.

Nach dieser vorläufigen Bestimmung verschiedener einzelnen Begriffe, und Abhandlung verschiedener Lehren und allgemeinen Wahrheiten, welche selbst im gemeinen Leben häufig mit Nutzen angewandt

werden

werden können, worauf aber insonderheit die genaue Bestimmung des Vermögens der einfachen Maschinen beruht, werde ich denn jetzt zeigen können, unter welchen Umständen und Verhältnissen bey einer Maschine 2 verschiedene einander entgegen wirkende Kräfte im Gleichgewichte mit einander seyn müssen.

1. Vom Hebel, (§. 79-90).

§. 79.

Bey einem waagförmigen Hebel sind 2 Kräfte, welche an demselben einander entgegen wirken, im Gleichgewichte mit einander, wenn sie sich gegen einander umgekehrt verhalten, wie ihre Entfernungen.

Sich von der Richtigkeit dieses für die ganze Statick sehr wichtigen Satzes zu überzeugen, muß man einen Unterschied machen, ob die Kräfte an einem Hebel, der durch sie horizontal erhalten werden soll, unter rechten oder schiefen Winkeln wirken, und für einen jeden dieser beyden Hauptfälle besonders die Richtigkeit deutlich zeigen und beweisen.

Erster Fall.

Gesetzt, daß jetzt zuerst 2 Gewichter P und Q (fig. 41) als Kräfte am horizontalen mathematischen Hebel AB unmittelbar durch ihre Schwere, und

folglich unter rechten Winkeln ziehen: alsdenn sind die Arme des Hebels AC und BC selbst auch die Entfernungen der Kräfte P und Q (§. 66); und es soll sich also hier zum Gleichgewichte verhalten:

Kr. P : Kr. Q = Entf. der Kr. Q : Entf. der Kr. P,

oder Kr. P : Kr. Q = BC : AC.

Beweis.

Es sey, z. E. AC = 1, und BC = 3; und dagegen sey umgekehrt die Kraft P am kürzern Arm AC = 3 ℔, und die Kraft Q an dem längern Arm BC = 1 ℔.

Sich nun zu überzeugen, daß unter diesem umgekehrten Verhältnisse der Kräfte und ihrer Entfernungen ein Gleichgewichte seyn müsse, bedenke man nur, daß die Schwere der Körper unverändert bleibt, wenn gleich die Gestalt derselben verändert wird. Hierauf nehme man an, daß beyde Gewichter in vollkommene Cylinder dergestalt verwandelt würden, daß ein Stück derselben, welches die Länge des kleinen Armes AC hätte, ein halbes Pfund wöge: so würde der Cylinder FH, worin das Gewicht P verwandelt wäre, 6 mal, der Cylinder GH aber, worin das Gewicht Q verwandelt wäre, doppelt so lang wie der kleine Arm des Hebels seyn. Wenn jetzt aber diese beyden Cylinder FH und GH neben einander in

einer

einer geraden Linie FG, und in dieser Lage durch einen mathematischen unbiegsamen Hacken DABC in der Mitte von beyden an einander befestigt würden: so machten sie gleichsam einen einzigen Cylinder aus; und wenn alsdenn die beyden Cylinder FH und GH an dem Hacken DABC dergestalt aufgehangen werden sollten, daß sie horizontal hiengen: so würde es in dem Puncte C gerade über der Mitte des ganzen Cylinders FG seyn müssen. Die beyden Cylinder FH und GH halten also einander das Gleichgewicht, wenn sie in dem Bewegungspuncte C des Hebels AB aufgehangen werden; und es müssen demnoch auch unter eben denselben Umständen die beyden Gewichter P und Q, als 2 einander entgegen wirkende Kräfte am Hebel AB einander das Gleichgewicht halten; oder es wird ein Gleichgewicht seyn müssen, wenn sich verhält:

Kr. P : Kr. Q = BC : AC;

oder wenn sich überhaupt verhält:

Kr. P : Kr. Q = Entf. der Kr. Q : Entf. der Kr. P.

Zweyter Fall.

Gesetzt aber ferner, daß 2 ungleiche Kräfte P und Q (fig. 42) abermal an einem horizontalen mathematischen Hebel DE unter schiefen Winkeln, etwa nach den Richtungen EI und DG ziehen: so ist AC die Entfernung der Kraft P, und BC die

Ent=

Entfernung der Kraft Q (§. 66), und es soll sich also auch hier zum Gleichgewichte verhalten:

die Kr. P : Kr. Q = Entf. d. Kr. Q : Entf. d. Kr. P, oder die Kr. P : Kr. Q = BC : AC.

Beweis.

Wenn zwey Kräfte an einem horizontalen Hebel unter schiefen Winkeln ziehen: so müssen die Directionslinien der Kräfte DG und EI sich irgendswo, z. E. in diesem Falle in F durchkreuzen; und es bemühen sich also die beyden Kräfte gleichsam nur den Punct F, anstatt des ganzen Hebels fortzuziehen. Wenn nun aber die Kraft P durch die Linie FG, und die Kraft Q durch FI ausgedrückt wird, und sich also verhält:

die Kr. P : Kr. Q = FG : FI;

so wird der Punct F sich nur nach der Richtung FH (§. 73) fortbewegen können; und wenn alsdenn in dieser Richtung eine hinlängliche Kraft widersteht: so erfolgt keine Bewegung. Man sieht daher auch leicht ein, wenn bey einem Hebel 2 Kräfte P und Q unter schiefen Winkeln ziehen, und sich dergestalt gegen einander verhalten, daß die Directionslinie ihrer gemeinschaftlichen Wirkung FH rückwärts verlängert genau auf den Bewegungspunct des Hebels C eintrift, daß alsdenn keine Bewegung erfolgen könne,

son-

sondern ein Gleichgewicht der Kräfte am Hebel bleiben müsse. In diesem Falle aber trift nun die Directionslinie FH rückwärts verlängert auf den Bewegungspunct des Hebels C würklich ein, und es werden also auch hier die beyden Kräfte P und Q bey den angenommenen Richtungen, im Gleichgewichte mit einander seyn müssen, und den Hebel DE nicht bewegen können, wenn sich verhält:

die Kr. P : Kr. Q = FG : FI.

Unter diesen Umständen aber verhält sich denn auch wieder:

FG : FI = Sin. < o : Sin. < y.

Es ist aber o = s,

und y = r:

---

folglich verhält sich:

FG : FI = Sin. < s : Sin. < r.

Wenn aber ferner aus F mit FC ein Zirkel beschrieben wird: so ist

Sin. < s = BC, und Sin. < r = AC;

und es muß also bey diesem Hebel DE, und unter den angenommenen Umständen ein Gleichgewicht der Kräfte seyn müssen, wenn sich verhält:

die Kr. P : Kr. Q = BC : AC,

oder welches dasselbe ist, wenn sich verhält:

die Kr. P : Kr. Q = Entf. der Kr. Q : Entf. der Kr. P;

und

und es wird demnach überhaupt bey einem waagförmigen Hebel beständig und unter allen Umständen ein Gleichgewicht seyn müssen, wenn die Kräfte sich verkehrt verhalten, wie ihre Entfernungen.

W. Z. E. W.

§. 80.

Dieser jetzt eben (§. 79) bewiesene Satz aber gilt nicht allein vom waagförmigen Hebel, sondern ebenfalls von einem jeden Hebel der 2ten Art; und hiervon kann man sich sehr leicht folgendermaassen überzeugen.

Bey dem waagförmigen Hebel AB (fig. 43) verhalte sich die Kr. P : Kr. Q = BC : AC; so sind die Kräfte P und Q mit einander im Gleichgewichte (§. 79). Gesetzt nun BC wäre genau doppelt so lang, wie AC: so muß auch die Kraft P genau doppelt so groß, wie die Kraft Q seyn. Es sey z. Ex. die Kraft Q ein Gewicht von 1 ℔: so muß die Kraft P ein Gewicht von 2 ℔ seyn; und die Unterlage im C trägt also in allen 3 ℔, oder widersteht mit einer Kraft von 3 ℔. Wenn jetzt aber statt der Unterlage in C in diesem Puncte eine Kraft R von 3 ℔ gerade nach obenzu zöge: so würde auch diese Kraft den Hebel AB mit den beyden Gewichtern

P

P und Q eben so tragen, und es würde keine Veränderung erfolgen können. Würde man endlich die Kraft P wegnehmen, und statt dessen nur ein Hindernis unmittelbar in A anbringen, welches den Arm des Hebels AC verhinderte in die Höhe zu gehen: so würde auch dies keine Veränderung machen, oder eine Bewegung des Hebels AB verursachen.

Jetzt aber stellt die Figur einen Hebel der 2ten Art vor, wobey sich im Gleichgewichte verhält:

die Kr. Q : Kr. R = AC : BC.

Es ist aber AC die Entfernung der Kraft R, und AB die Entfernung der Kraft Q; und es verhält sich also hier im Gleichgewichte

die Kr. Q : Kr. R = Entf. der Kr. R : Entf. der Kr. Q; und folglich ist auch bey dem Hebel der 2ten Art ein Gleichgewicht, wenn die Kräfte, welche an demselben nach entgegen gesetzter Richtung ziehen, sich verkehrt verhalten, wie ihre Entfernungen.

W. Z. E. W.

§. 81.

Wenn ein waagförmiger Hebel AB (fig. 44) um seinen Bewegungspunct C sich bewegt, so beschreibt der Punct A den Bogen Aa in eben der Zeit, als der Bogen B den Bogen Bb. Die Bögen Aa und Bb sind aber den Bögen Dd und Ee, welche die

Schwer=

Schwerpuncte der Kräfte P und Q bey dieser Bewegung beschreiben, gleich; und bestimmen also sowohl wie diese, das Verhältnis der Räume, durch welche die Kräfte P und Q in gleicher Zeit sich fortbewegen. Mit den Räumen der Kräfte aber steht die Geschwindigkeit derselben in gleichem Verhältnisse, und es verhält sich also hier:

Geschw. der Kr. P : Geschw. der Kr. Q = Bog. Aa : Bog. Bb.

Nach geometrischen Gründen aber verhält sich:

der Bog. Aa : Bog. Bb = AC : BC;

und folglich verhält sich auch:

Geschw. der Kr. P : Geschw. der Kr. Q = AC : BC.

AC und BC sind endlich die Entfernungen der Kräfte P und Q, und also verhält sich:

Geschw. der Kr. P : Geschw. der Kr. Q = Entf. der Kr. P : Entf. der Kr. Q.

Und wenn demnach bey einem Hebel ein Gleichgewicht ist, wenn die Kräfte sich verkehrt verhalten, wie ihre Entfernungen (§. 79): so muß auch ein Gleichgewicht seyn, wenn die Kräfte sich verkehrt verhalten, wie ihre Geschwindigkeiten; und eine jede Vermehrung der Kraft durch eine geschwindere Bewegung (§. 13) steht also mit der grössern Geschwindigkeit im genauesten Verhältnisse. Eine doppelte Geschwindigkeit gibt eine doppelte Ver-

meh-

mehrung der Kraft, eine 3fache Geschwindigkeit, eine 3fache Vermehrung der Kraft u. s. w. Und die Kraft, mit welcher ein Körper drückt, wenn er in Bewegung ist, und in der Bewegung auf etwas stößt, ist demnoch überhaupt sein Gewicht, oder wie man sagt, seine Masse mit der Geschwindigkeit multiplicirt.

§. 82.

Weil ferner bey einem Hebel zwischen 2 Kräften P und Q ein Gleichgewicht ist, wenn sich verhält:

die Kr. P : Kr. Q = Entf. der Kr. Q : Entf. d. Kr. P,
oder Kr. P : Kr. Q = Geschw. der Kr. Q : Geschw. der Kr. P:

so ist auch Kr. P × Entf. der Kr. P = Kr. Q × Entf. der Kr. Q,
oder Kr. P × Geschw. der Kr. P = Kr. Q × Geschw. der Kr. Q.

Ein Product aus einer Kraft und ihrer Entfernung oder Geschwindigkeit aber nennt man das Moment der Kraft; und bey einem Hebel ist also ein Gleichgewicht, wenn die Momente der Kräfte auf beyden Seiten des Punctes der Unterlage einander gleich sind.

§. 83.

Nach diesen Bestimmungen wird es jetzt leicht seyn, bey einem mathematischen Hebel folgende Aufgaben aufzulösen.

Wenn man bey diesen Aufgaben einen Unterschied unter Kraft und Last macht, und denn zuvörderst die Länge von beyden Armen des Hebels AC und BC (fig. 45), und die Last am kürzern Arme P gegeben sind, und die zum Gleichgewichte nöthige Kraft am längern Arme Q gefunden werden soll: so schließt man nur

Entf. der Kr. Q : Entf. der Last P = Last P : Kr. Q,

das ist BC : AC = P : Q;

und es ist also die Kraft $Q = \frac{P \times AC}{BC}$,

oder wenn nach den Momenten der Kräfte (§. 82) zum Gleichgewichte

$Q \times BC = P \times AC$ seyn muß:

so ist abermal $Q = \frac{P \times AC}{BC}$.

Es sey z. E. AC = 2, BC = 5 und P 100 ℔:

so ist $Q = \frac{100 \times 2}{5} = 40$ ℔.

§. 84.

Wenn aber ferner die Arme des Hebels AC und BC, und die Kraft am längern Arme desselben

Q

Q gegeben sind; und die Last am kurzern Arme P gefunden werden soll: so schliesse man (fig. 45)

Entf. der Last P : Entf. der Kr. Q = Kr. Q : Last P,

oder AC : BC = Q : P;

$$\text{und ist also die Last } P = \frac{Q \times BC}{AC}.$$

oder nach den Momenten der Kräfte zum Gleichgewichte ist: $P \times AC = Q \times BC$;

$$\text{und also die Last } P = \frac{Q \times BC}{AC}.$$

Es sey abermal AC = 2, BC = 5, und Q = 40 ℔:

$$\text{so ist } P = \frac{40 \times 5}{2} = 100 \text{ ℔}.$$

§. 85.

Endlich kann auch noch, wenn nebst der Länge eines Hebel AB (fig. 45) die Last P, und die Kraft Q an den beyden Enden desselben gegeben sind, der Ruhepunkt am Hebel C, als der gemeinschaftliche Schwerpunct der Last und der Kraft folgendergestalt gefunden werden.

Es sey z. E. die zu suchende Entfernung der Last P = AC: so ist die Entfernung der Kraft Q oder BC = AB — AC; und es ist daher zum Gleichgewichte,

$$P \times AC = Q \times (AB - AC),$$

oder $P \times AC = Q \times AB - Q \times AC$;

folglich ist $P \times AC + Q \times AC = Q \times AB$,

und also $AC = \frac{Q \times AB}{P + Q}$.

Es sey z. E. $AB = 7$, $P = 100$ ℔. und $Q = 40$ ℔.;

so ist $AC = \frac{40 \times 7}{100 + 40} = 2$.

§. 86.

Wenn aber jetzt diese Berechnungen des Gleichgewichtes bey einem körperlichen Hebel im gemeinen Leben, der eine Schwere hat, gemacht werden sollten: so kommt die Schwere des Hebels mit in Betracht, indem dadurch schon ein Theil der Last am kürzern Arme im Gleichgewichte erhalten werden kann. In Ansehung dieser Schwere des Hebels scheint es nun allerdings nothwendig zu seyn, anzunehmen, daß die Schwere des Armes AC (fig. 46) für sich in seinem Schwerpuncte D, und eben so die Schwere des Armes BC in seinem Schwerpuncte E wirke; und daß also gleichsam 4 Gewichter am mathematischen Hebel AB in A, D, E und B hangen, von denen entweder die Last in A, oder die Kraft in B, oder auch der gemeinschaftliche Schwerpunct von allen 4

Gewichtern, oder der Punct der Unterlage in C zum Gleichgewichte bestimmt werden soll. Indessen werde ich jezt durch eine allgemeine Rechnung zeigen, daß man statt dessen die Schwere des ganzen Hebels AB in seiner Mitte in F wirken lassen kan; und daß man also nur 3 Gewichter am Hebel AB in A, F und B annehmen darf. Es sey z. E.

die Länge des Hebels AB = a gleiche Theile, und die Länge des Armes AC = b solcher Theile: so ist die Länge des Armes BC = a - b dieser Theile. Ferner sey

die Schwere des Hebels AB = c ℔:

so ist die Schwere des Armes AC in D = $\frac{bc}{a}$ ℔,

und die Schwere des Armes BC in E = $\frac{(a-b).c}{a}$ ℔.

Wenn hierauf zuerst am mathematischen Hebel DE, woran in E das Gewicht des Armes BC = $\frac{(a-b).c}{a}$ ℔ hängt, gefunden werden soll, wie groß die Kraft R in D seyn muß, dieses Gewicht F in E im Gleichgewichte zu erhalten: so ist

$$R \times CD = T \times CE;$$

und folglich $R = (T \times CE) : CD,$

$$= \left(\frac{(a-b).c}{a} \times \frac{a-b}{2}\right) : \frac{b}{2},$$

$$= \frac{(a^2 - 2ab + b^2).c}{2a} : \frac{b}{2},$$

$$= \frac{(a^2 - 2ab + b^2).c}{ab},$$

$$= \frac{a^2c - 2abc + b^2c}{ab}.$$

In D aber hängt gleichsam schon die Schwere des Armes AC $= \frac{bc}{a}$ ℔, und es darf also auch so viel weniger Kraft in D angebracht werden, um den Hebel allein im Gleichgewichte zu erhalten; und die zum Gleichgewichte des Hebels allein nöthige Kraft in D ist also

$$= \frac{a^2c - 2\,abc + b^2c}{ab} - \frac{bc}{a},$$

$$= \frac{a^2c - 2\,abc + b^2c}{ab} - \frac{b^2c}{ab},$$

$$= \frac{a^2c - 2\,abc}{ab},$$

$$= \frac{ac - 2\,bc}{b}.$$

Anstatt der Kraft in D aber kann man mit der halben Kraft in A, weil alsdenn die Entfernung doppelt so groß ist, den Hebel im Gleichgewichte erhalten; und folglich ist auch umgekehrt die Last in A, welche durch die Schwere des Hebels allein im Gleichgewichte erhalten werden kann

$$= \frac{ac - 2\,bc}{b} : 2$$

$$= \frac{ac - 2\,bc}{2\,b}.$$

Nimmt man aber jetzt ferner an, daß der Hebel AB mit seiner ganzen Schwere V in seinem Schwerpuncte F wirke; und alsdenn die Last P in A bestimmt werden soll, welche durch den Hebel allein

im Gleichgewichte erhalten werden kann: so ist am mathematischen Hebel AF ein Gleichgewicht, wenn

$$P \times AC = V \times FC \text{ ist;}$$

und alsdenn ist $P = \frac{V \times FC}{AC}$,

$$= c \times (\tfrac{a}{2} - b) : b,$$

$$= (c \times \tfrac{a - 2b}{2}) : b,$$

$$= \frac{ac - 2bc}{2b}.$$

Der Ausdruck für die Last, welche an dem kürzern Arme durch den Hebel allein erhalten werden kann, ist also in beyden Fällen derselbe; und man kann daher annehmen, daß der Hebel unter allen Umständen und beständig mit seiner ganzen Schwere in seinem Schwerpuncte wirke. W. Z. E. W.

§. 87.

Wenn jetzt wieder zuerst bey einem Hebel AB (fig. 47) nicht nur die Länge der beyden Arme desselben AC und BC, und die Last am kürzern Arme P, sondern auch die Schwere des Hebels gegeben ist; und alsdenn die zum Gleichgewichte des Ganzen nöthige Kraft am längern Arme Q gefunden werden soll: so stelle man sich vor, daß anstatt der Schwere des Hebels, ein Gewicht V am mathematischen Hebel

AB

AB in seinem Schwerpuncte F hange; und alsdenn suche man

1. Wie viel von der Last P durch die Schwere des Hebels V allein im Gleichgewichte erhalten werden könne, indem man schließt:

$$AC : CF = V : \frac{V \times CF}{AC}.$$

2. Diese gefundene Last ziehe man von der Last P ab, und zu dem Reste suche man die nöthige Kraft am längern Arme Q, indem man schließt:

$$BC : AC = P - \frac{V \times CF}{AC} : Q,$$

und es ist also $Q = \frac{P \times AC - V \times CF}{BC}$.

Oder nach den Momenten der Kräfte zum Gleichgewichte müssen jetzt die beyden Momente der Schwere des Hebels V, und der Kraft Q zusammen dem Momente der Last P gleich seyn; und also ist;

$$Q \times BC + V \times CF = P \times AC,$$

folglich $Q \times BC = P \times AC - V \times CF$,

und also $Q = \frac{P \times AC - V \times CF}{BC}$.

Es sey z. E. AB = 7, und AC = 2: so ist BC = 5 und CF = $1\frac{1}{2}$. Ferner sey P = 100 ℔ und V = 12 ℔: so ist

$$Q = \frac{100 \times 2 - 12 \times 1\frac{1}{2}}{5} = 36\frac{2}{5}\ ℔.$$

§. 88.

§. 88.

Wenn aber bey einem Hebel AB (fig. 47), die Länge der beyden Arme AC und BC, die Schwere des Hebels, und die Kraft am längern Arme Q gegeben ist, und alsdenn die Last P, welche unter diesen Umständen am kürzern Arme des Hebels im Gleichgewichte erhalten werden kann, gefunden werden soll: so gedenke man sich wieder, daß die Schwere des Hebels V in seinem Schwerpunkte F am mathematischen Hebel AB hange; und nun suche man

1. Wie viel Last am kürzern Arme AC durch die Schwere des Hebels V allein im Gleichgewichte erhalten werden kann, indem man schließt:

$$AC : CF = V : \frac{V \times CF}{AC}.$$

2. Hierauf suche man ebenfalls, wie viel Last am kürzern Arme AC durch die Kraft Q im Gleichgewichte erhalten werden könne, indem man schließt:

$$AC : BC = Q : \frac{Q \times BC}{AC}.$$

3. Diese beyden gefundenen Gewichter addire man zusammen: so giebt dies die ganze Last P, welche am kürzern Arme AC durch die Schwere des Hebels V, und die Kraft Q im Gleichgewichte erhalten werden kann. Es ist also:

$$P = \frac{V \times CF + Q \times BC}{AC}.$$

Oder nach den Momenten ist hier auch wieder das Moment der Last P, gleich den beyden Momenten der Schwere des Hebels V, und der Kraft Q zusammen; und also ist:

$$P \times AC = V \times CF + Q \times BC,$$

folglich $P = \frac{V \times CF + Q \times BC}{AC}$.

Es sey abermal AB = 7, und AC = 2: so ist BC = 5, und CF = $1\frac{1}{2}$. Ferner sey Q = $36\frac{2}{5}$ ℔, und V = 12 ℔: so ist

$$P = \frac{12 \times 1\frac{1}{2} + 36\frac{2}{5} \times 5}{2} = 100 \text{ ℔}.$$

§. 89.

Wenn endlich noch die Länge eines Hebels AB (fig. 47) mit samt der Schwere desselben, und sowohl die Last P als die Kraft Q an den beyden Enden des Hebels gegeben sind; und der Ruhepunkt des Hebels, als der gemeinschaftliche Schwerpunct der 3 gegebenen Gewichter gefunden werden soll: so erwäge man nur, daß, wenn die Kraft Q kleiner, als die Last P ist, die Kraft Q deswegen zum Gleichgewichte eine grössere Entfernung, als die Last P haben müsse; und daß also der Ruhepunct des Hebels näher nach A, als nach B hinkommen müsse. Ferner hängt jetzt wieder die Schwere des Hebels V in

der Mitte desselben F am mathematischen Hebel AB; und hierauf sey die zu suchende Entfernung der Last P = AC: so ist die Entfernung der Kraft Q = AB — AC, und der Schwere des Hebels V = AF — AC, und es ist also

$$P \times AC = Q \times (AB - AC) + V \times (AF - AC),$$
$$= Q \times AB - Q \times AC + V \times AF - V \times AC,$$

---

folglich $P \times AC + Q \times AC + V \times AC = Q \times AB + V \times AF,$

---

und also ist $AC = \frac{Q \times AB + V \times AF}{P + Q + V}.$

Es sey z. E. auch jetzt AB = 7, P = 100 ℔, Q = $36\frac{2}{5}$ ℔, und V = 12 ℔; so ist:

$$AC = \frac{36\frac{2}{5} \times 7 + 12 \times 3\frac{1}{2}}{36\frac{2}{5} + 100 + 12} = 2.$$

§. 90.

Auch bey einem jeden Hebel von der 2ten Art können, wie beym waagförmigen Hebel, verschiedene Aufgaben statt finden. Indessen weil beym Hebel von der 2ten Art der Bewegungspunct immer an dem einen Ende des Hebels ist: so fällt die Aufgabe, diesen Punct zu finden, hier ganz weg. Die Kraft oder die Last aber sowohl beym Trag- als Wurfhebel

nach

nach Beschaffenheit der Umstände zum Gleichgewichte zu finden, geschieht auf eben die Art, wie beym waagförmigen Hebel, und darf daher auch jetzt nicht wieder besonders gezeigt werden.

2. Vom Rade an einer Axe, (§. 91-95).

§. 91.

Das Rad an einer Axe (fig. 6) ist nichts anders, als ein sehr bequem eingerichteter waagförmiger Hebel (§. 21); es muß daher auch bey demselben ein Gleichgewicht seyn, wenn die an der Peripherie des Rades angebrachte Kraft, und die an der Welle befindliche Last sich verkehrt, wie ihre Entfernungen (§. 79) oder Geschwindigkeiten (§. 81) verhalten. Die Entfernung der Kraft aber ist hier der Radius des Rades BC, und die Entfernung der Last ist der Radius der Welle AC; oder diese beyden Radien bestimmen auch das Verhältnis der Geschwindigkeit zwischen Kraft und Last (§. 20): und es muß daher auch bey einem Rade an einer Axe zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last sich immer verhalten:

Kr. : Last = Radius der Welle : Radius des Rades, oder es ist im Gleichgewichte

die Kr. × Rad. des Rades = Last × Rad. der Welle.

Und

Und darnach läßt sich denn nun auch in einem jeden besondern Falle bey dieser Maschine entweder die Kraft, wenn die Last gegeben ist, oder die Last, wenn die Kraft gegeben ist, wie beym einfachen Hebel, leicht finden und bestimmen.

§. 92.

Nicht allezeit aber wird die Kraft bey einem Rade an einer Axe an einem Radius des Rades angebracht, welcher mit dem Radius der Welle, woran die Last hängt, in einer geraden Linie liegt. Alsdenn muß man einen Unterschied machen, ob die Kraft an dem Radius des Rades, woran sie angebracht wird, unter einem rechten Winkel zieht, oder nicht.

Wenn erstlich z. Ex. die Kraft in D (fig. 48) an dem Radius DC nach der Richtung DG unter einem rechten Winkel zieht: so ist der Radius DC selbst auch hier die Entfernung der Kraft; oder es befindet sich hier ein Winkelhebel ACD (§. 67), an dessen beyden Armen die Kräfte unter rechten Winkeln, folglich mit der größten Entfernung, und also auch mit der größten Kraft ziehen. Dieser Umstand macht also keine Veränderung, sondern verschaft eben dieselbe Vermehrung der Kraft, als wenn sie in B nach der Richtung BG zöge.

Wenn

Wenn aber eine Kraft in E an dem Radius CE nach der Richtung EH zieht, welches der Fall ist, wenn ein Mensch in einem Rade geht, und gleichsam an der Peripherie des Rades hinauf steigen will, und nun wie ein lebloses Gewicht blos durch seine Schwere das Rad in Bewegung setzt: so ist nicht der Radius CE, sondern CF ist die Entfernung der Kraft (§. 46), und es wird sich unter diesen Umständen zum Gleichgewichte verhalten müssen:

Kraft : Last = AC : CF.

In diesem Falle verliehrt also die Kraft an ihrem Vermögen; je höher indessen der Mensch hinauf nach B kommen kann: desto grösser wird auch die Wirkung seiner Schwere seyn. Sobald er aber nur so hoch kommt, daß er im Stande ist, das Rad mit der Last an der Welle in Bewegung zu setzen: so fängt es von selbst an, sich zu bewegen, und er kann alsdenn nicht höher hinauf steigen, sondern das Rad bewegt sich immer unter seinen Füssen weg; und auf diese Weise wird denn die Last an der Welle in die Höhe gewunden.

Würde er vollends bis in B hinauf steigen, ohne daß das Rad anfienge sich zu bewegen: so wäre dies ein Zeichen, daß er mit seiner Schwere die Last an der Welle nicht in die Höhe bringen könne.

§. 93.

Wenn mehrere z. B. etwa 3 Räder (fig. 49) wie oben (§. 23) gezeigt worden ist, erforderlich sind, eine Last zu bewegen; und alsdenn bestimmt werden soll, wie groß die Kraft an der Peripherie des letzten Rades seyn muß, einer Last an der Welle des ersten Rades das Gleichgewicht zu halten: so berechne man nur erstlich, wie viel Kraft an der Peripherie des ersten Rades in C nöthig seyn würde, die Last P an der Welle des ersten Rades in A im Gleichgewichte zu erhalten, indem man schließt:

BC : AB = Last P : Kraft Q.

Diese Kraft Q sehe man als eine Last an, welche an der Welle des 2ten Rades erhalten werden soll; und bestimme abermal die Kraft R, welche an der Peripherie dieses Rades in F erfordert wird, die Last Q in D, und folglich auch die Last P in A zu erhalten, indem man schließt:

EF : ED = Last Q : Kraft R.

Zu dieser Kraft R, als zu einer Last an der Peripherie der Welle des 3ten Rades in G suche man endlich die Kraft T, welche an der Peripherie dieses Rades in I nöthig ist, die Last R in G zu erhalten; und diese Kraft T wird denn überhaupt hier erfordert, die Last an der Welle des ersten Rades in A zu erhalten. Man schliesse also nur zuletzt:

HI : GH = Last R : Kraft T.

§. 94.

Diese Berechnung der Kraft bey einem Räderwerke nach den Radien der Räder und Wellen, als nach den Entfernungen der Kräfte, ist freylich mechanisch vollkommen richtig, und zum Theil nothwendig, oder wenigstens die kürzeste und leichteste, wenn die verschiedenen Räder durch Ketten oder Schnüre sich einander die Bewegung mittheilen. Greifen aber die Räder durch Zähne und Getriebe in einander ein: so kann man nicht gut die Grösse der Radien sowohl bey den Rädern, als bey den Getrieben genau messen; und es wird daher in dem Falle besser seyn, die Kraft nach den Räumen, welche Kraft und Last in einer gleichen Zeit durchlaufen, oder nach der verhältnismäßigen Geschwindigkeit der Kraft und der Last zu berechnen. In dieser Hinsicht suche man nur

1. Wie oft dasjenige Rad, welches am geschwindesten lauft, rund gehen muß, bevor das langsamste Rad einmal herumkommt. So vielmal nemlich die Anzahl der Triebstöcke oder der Einschnitte eines Getriebes in der Anzahl der Zähne des darin eingreifendes Rades enthalten ist; so vielmal öfterer geht auch das Getriebe mit seinem Rade, als das darin eingreifende Rad herum. Man sucht daher nur den Exponenten der Triebstöcke oder der Ein-

schnitte des Getriebes, und der Zähne des eingreifenden Rades bey je zwey und zwey Rädern des ganzen Räderwerkes, und multiplicirt diese Exponenten mit einander: so zeigt das Product an, wie vielmal das letzte oder geschwindeste Rad umläuft, bevor das erste oder langsamste Rad einmal herumkommt. Hierauf suche man

2. Wie vielmal die Peripherie des letzten Rades, woran die Kraft zieht, grösser ist als die Peripherie der Welle des ersten Rades, woran die Last hängt; oder weil die Diameter sich wie die Peripherien verhalten, wie vielmal der Diameter des letzten Rades grösser ist, als der Diameter der ersten Welle. Alsdenn multiplicire man

3. Das zuerst gefundene Product, mit diesem jetzt gefundenen Exponenten: so zeigt dies neue Product an, wie vielmal die Geschwindigkeit der Kraft bey diesem Räderwerke überhaupt grösser ist, als die Geschwindigkeit der Last; und wie vielmal demnoch auch die Kraft kleiner, als die Last seyn könne, ihr das Gleichgewicht zu halten. Man dividire daher endlich

4. Nur die Last durch dieses letzte Product: so erhält man die Kraft, welche im Ganzen nöthig ist, die Last im Gleichgewichte zu erhalten.

§. 95.

Bey den verschiedenen Arten sowohl der horizontalen, als verticalen oder Erdwinden, und bey einer Kurbel (§. 22) ist die Berechnung der Vermehrung der Kraft, welche durch den Gebrauch dieser Werkzeuge erhalten wird, vollkommen eben dieselbe, wie bey einem ordentlichen Rade an einer Axe. Indessen kann die Kraft bey denselben nicht allezeit gleichförmig oder gleich stark wirken; und dieses muß denn immer in der Ausübung bey dem Gebrauche derselben mit in Erwägung gezogen werden.

Was ferner noch übrigens eine Kurbel ins besondere betrift: so ist es in Hinsicht der durch sie zu erhaltenden Vermehrung der Kraft einerley, ob sie gerade oder gekrümmt sey, indem die Kraft durch die Krümmung der Kurbel keine grössere Entfernung erhält. Ja würde eine gerade Kurbel nur allein gekrümmt, und nicht zugleich so viel länger gemacht: so würde die Entfernung der Kraft gar kleiner werden, und folglich die Kraft dadurch am Vermögen würklich verliehren.

3. Von der Rolle und den Flaschenzügen, (§. 96-102.)

§. 96.

Schon oben (§. 26) ist gezeigt worden, daß eine gewöhnliche einfache Rolle (fig. 11), weil bey dem Gebrauche derselben Kraft und Last gleich geschwind gehen, keine Vermehrung der Kraft giebt. Bey einer Rolle von der 2ten Art aber (fig. 12) geht die Kraft, wenn die Theile des Taues, worin die Rolle hängt, auf beyden Seiten derselben parallel gehen, genau doppelt so geschwind, wie die Last (§. 28); und auch ist nach dem Gesetze des Hebels hier die Entfernung der Kraft AB doppelt so groß, wie die Entfernung der Last AC; es wird daher unter diesen Umständen die Kraft Q nur halb so groß, wie die Last P seyn dürfen, ihr das Gleichgewicht zu halten.

§. 97.

Wenn aber die Theile des Taues, wie z. E. AF und BG (fig. 50) nicht parallel gehen: so ist auch nicht der Diameter der Rolle HI, sondern eine Sehne derselben AB der Hebel; und ebenfalls ist jetzt nicht die ganze Länge des Hebels, sondern AD die Entfernung der Kraft Q (§. 66). Die Entfernung

nung der Last P aber ist die halbe Länge des Hebels oder AC; und folglich wird hier zum Gleichgewichte sich verhalten müssen:

Kraft Q : Last P = AC : AD.

Weil aber nach geometrischen Gründen AD kleiner wie AB, und folglich AC grösser, wie die Hälfte von AD ist: so wird auch die Kraft Q mehr als halb so groß, wie die Last P seyn müssen, ihr das Gleichgewicht zu halten. Und je höher die Last P hinaufgezogen wird, desto mehr verliehrt die Kraft von ihrem Vermögen, oder desto mehr Kraft wird erfordert, die Last im Gleichgewichte zu erhalten.

§. 98.

Auch bey einem jeden Kloben- oder Flaschenzuge (§. 32) ist es jetzt leicht zu bestimmen, wie groß die Vermehrung der Kraft bey dem Gebrauche dieses Werkzeuges seyn müsse.

Bey einem gewöhnlichen Flaschenzuge (fig. 14 und 15) erwäge man nur zuvörderst, daß wenn die Last P etwa einen Fuß in die Höhe oder seitwärts fortgezogen werden soll, ein jedes Stück des Taues, z. E. ab, cd, fg u. s. w., so viel ihrer auch zu beyden Seiten der Rolle mit einander parallel gehen, um einen Fuß kurzer werden müsse; und daß also die Kraft in eben der Zeit so viel Fuß Tau, als Theile des

Taues parallel gehen, ausziehen, und folglich sich auch genau so vielmal geschwinder, wie die Last fortbewegen müsse. Die Kraft, welche bey einem gewöhnlichen Flaschenzuge erfordert wird, eine gewisse Last im Gleichgewichte zu erhalten, wird demnach gefunden, wenn man die Last durch die Anzahl der mit einander parallel gehenden Theile des Taues, oder weil dieser Anzahl die Anzahl der Rollen in beyden Flaschen allemal gleich ist, durch die Anzahl der Rollen in beyden Flaschen dividirt.

§. 99.

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens kann man sich noch folgendermaassen überzeugen.

Wenn bey einem Flaschenzuge z. E. 5 Rollen in beyden Flaschen zusammen sind, und folglich auch 5 parallel gehende Theile des Taues sich dabey befinden (fig. 14): so trägt im Gleichgewichte jedes einzelne Stück vom Taue den 5ten Theil der ganzen Last. Wenn alsdenn aber nur das eine Stück des Taues, woran die Kraft Q unmittelbar zieht, von der Kraft gehalten wird: so ist an dem ganzen Flaschenzuge alles in Ruhe, oder im Gleichgewichte mit einander; und folglich wird auch überhaupt nur der 5te Theil der Last zur Kraft Q erfordert, die ganze Last P im Gleichgewichte zu erhalten.

§. 100.

§. 100.

Es gibt noch verschiedene andere Arten von Flaschenzügen, wie schon oben (§. 32) angemerkt worden ist; die einzelnen Rollen eines Flaschenzuges aber mögen mit einander verbunden seyn, wie sie wollen: so darf man nur, wenn das Vermögen desselben bestimmt werden soll, in einem jeden Falle allemal erst untersuchen, wie in der Bewegung die Geschwindigkeit der Kraft sich zur Geschwindigkeit der Last verhalte. So vielmal alsdenn die Geschwindigkeit der Kraft grösser ist, als die Geschwindigkeit der Last, eben so vielmal kleiner als die Last kann auch die Kraft seyn, die Last im Gleichgewichte zu erhalten (§. 81).

§. 101.

Die verhältnismäßige Geschwindigkeit der Kraft und der Last aber läßt sich nicht immer bey einem jeden Flaschenzuge so leicht, wie bey den jezt abgehandelten, nach einer Zeichnung oder Vorstellung auf dem Papiere beurtheilen. In solchen Fällen ist es gut, Modelle zu haben, und nach denselben kann man alsdenn das Verhältnis der Geschwindigkeit zwischen Kraft und Last, und folglich auch das Vermögen der Kraft in einem jeden besondern Falle sehr leicht finden und vollkommen genau angeben.

§. 102.

Nach einer richtigen Vorstellung eines Flaschenzuges auf dem Papiere kann man indessen doch auch bey demselben, wenn gleich die verhältnismäßige Geschwindigkeit der Kraft und der Last in der Bewegung nicht deutlich daraus erhellet, dennoch die Vermehrung der Kraft, welche dadurch erhalten wird, auf eine andere Art gründlich darthun und beweisen.

Wenn z. E. bey dem Flaschenzuge (fig. 16), dessen ich schon oben (§. 32) erwähnt habe, untersucht werden soll, wie groß die Last P seyn werde, welche etwa von einem Pfunde Kraft in Q im Gleichgewichte erhalten werden kann: so ist ganz deutlich und klar, daß die Last P mit einer Gewalt von einem Pfunde am Theile des Taues ab ziehen müsse, der einpfündigen Kraft Q zu widerstehen. Das Stück des Taues cd trägt also 2 ℔; oder wird mit einer Kraft von 2 ℔ angezogen. Mit cd aber soll wieder fg im Gleichgewichte seyn; und es muß also die Last P mit einer Gewalt von 2 ℔ an fg ziehen. Die einpfündige Kraft Q wird also bey diesem Flaschenzuge eine 3pfündige Last P im Gleichgewichte erhalten können; oder überhaupt ein solcher Flaschenzug gibt eine 3fache Vermehrung der Kraft.

4. Von der schiefliegenden Fläche, (§. 103-113).

§. 103.

Wenn bey einer schiefliegenden Fläche bestimmt werden soll, wie viele Kraft nach Beschaffenheit derselben erfordert werde, eine Last auf derselben ruhend zu erhalten, daß sie nicht überschlage und herunterwälze, oder herabrolle: so ist schon vorher (§. 51) bemerkt worden, daß die Directionslinie der Last ausserhalb ihrer Grundfläche fallen müsse; weil sonst die Last entweder nur herabglitschen, oder wohl gar, wenn die Reibung der sich einander berührenden Flächen der Last und der schiefliegenden Fläche stark genug wäre, das herabglitschen zu verhindern, ohne alle Kraft still liegen würde. Bey Bestimmung der Kraft, welche erfordert wird, eine Last auf einer schiefliegenden Fläche ruhend zu erhalten, gedenkt man sich daher nicht nur die Last unter der Gestalt einer Kugel, sondern nimmt überdem auch noch an, daß die schiefliegende Fläche vollkommen hart, glatt und eben sey; und folglich gar keine Reibung statt finden köne.

Wenn ferner die Last die Gestalt einer Kugel hat, und durchaus von einerley Materie ist: so ist der Schwerpunct in dem Mittelpuncte derselben, und

die Kraft muß also suchen, diesen Punct in Ruhe zu erhalten, und folglich auch unmittelbar an demselben ziehen.

§. 104.

Nach diesen vorläufigen Bestimmungen kommt es endlich noch nur darauf an, jedesmal erst zu untersuchen, in welcher Richtung die Kraft an dem Schwerpuncte der Last auf der schiefliegenden Fläche ziehe. Bey Erklärung der schiefliegenden Fläche (§. 33-35) wurde angenommen, daß die Kraft nach der Richtung ED (fig. 18) parallel mit der schiefliegenden Fläche AC zöge. Nach dieser Richtung zieht freylich die Kraft, wie jetzt gezeigt werden soll, mit dem größten Vortheile; indessen kann die Kraft auch nach verschiedenen andern Richtungen ziehen, und insonderheit wird in der Folge erhellen, daß im gemeinen Leben vielfältig der Fall sey, daß die Kraft bey einer schiefliegenden Fläche parallel mit der Grundfläche BC wirke.

Diese beyden Fälle, wenn nemlich die Kraft parallel mit der schiefliegenden Fläche selbst (fig. 51), oder parallel mit der Grundfläche derselben (fig. 52) zieht, werden daher auch vorzüglich jeder für sich besonders untersucht; und es wird für einen jeden dieser Fälle das Verhältnis der Kraft zur Last im Gleich-

gewichte

gewichte genau bestimmt. Die übrigen Fälle, wenn nemlich die Kraft entweder nach der Richtung DI (fig. 53), oder nach der Richtung DI (fig. 54) zieht, kommen im gemeinen Leben nicht leicht vor, oder man sucht wenigstens diese Fälle, so viel wie nur möglich ist, z. E. beym Fuhrwesen, zu vermeiden. Von denselben wird daher auch nur gewiesen, wie das Verhältnis der Kraft zur Last zum Gleichgewichte, nach Beschaffenheit der Umstände, mehr oder weniger von den beyden Hauptfällen abweiche, oder mit ihnen übereinkomme.

§. 105.

Wenn nun zuvörderst bey der schiefliegenden Fläche ABC (fig. 51) die Directionslinie der Kraft DI mit der schiefliegenden Fläche parallel geht: so ist von diesem Falle schon oben (§. 34) gezeigt worden, daß die Geschwindigkeit der Kraft sich zur mechanischen Geschwindigkeit der Last verhalte, wie die Länge der schiefliegenden Fläche AC, zur Höhe derselben AB. Und folglich muß unter diesen Umständen ein Gleichgewicht zwischen Kraft und Last seyn, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie die Höhe der schiefliegenden Fläche AB, zur Länge derselben AC (§. 81); oder kurz nach der Figur, wenn sich verhält:

Kraft : Last = AB : AC.

W. Z. E. W.

§. 106.

Auch nach dem Gesetze des Hebels läßt sich eben dieses jetzt leicht zeigen und beweisen.

Man erwäge nur, daß die Last in dem Puncte E auf der schiefliegenden Fläche liegt, und sich also, wann sie bewegt wird, zuerst um diesen Punct bewegen muß; und daß man daher auch diesen Punct E als den Ruhe- oder Bewegungspunct des Hebels ansehen kann.

An dem Schwerpuncte der Körpers D zieht nun aber ferner die Kraft nach der Richtung DI parallel mit der schiefliegenden Fläche AC; und der Radius der Kugel DE, welcher auf der Länge der schiefliegenden Fläche AC, als auf einem Tangenten der Kugel perpendiculair steht, steht folglich auch auf der Directionslinie der Kraft DI perpendiculair, und ist also die Entfernung der Kraft.

Die Directionslinie der Schwere des Körpers oder der Last ist die aus dem Schwerpuncte desselben D auf die Horizontallinie BC herabgefällete Perpendiculairlinie DF; und die Entfernung der Last von dem Bewegungspuncte E ist also die Perpendiculairlinie EG.

Nach diesen Bestimmungen sieht man denn nun hier ganz deutlich einen Winkelhebel DEG, an dessen einem Arme DE die Kraft, am andern Arme

EG

EG aber die Last, und zwar beyde unter rechten Winkeln, und folglich mit der grösten Kraft wirken. Soll demnach unter diesen Umständen die Last von der Kraft ruhend erhalten werden, oder soll zwischen Kraft und Last ein Gleichgewicht statt finden: so muß sich nothwendig verhalten:

Kraft : Last = EG : ED, (§. 79).

Es ist aber der Δ DEG ∾ Δ EHG, (§. 163 der Geom.); und also verhält sich:

EG : ED = GH : EH.

Weil ferner der W. r = s,

und m = p = 90° ist:

so ist auch o = q;

---

und folglich Δ EHG ∾ Δ CHF, (§. 156 der Geom.), und es verhält sich:

GH : EH = HF : HC.

Ferner aber geht HF ♯ AB, (§. 155 der Geom.);

---

folglich ist der Δ CHF ∾ Δ CAB,

und es verhält sich:

HF : HC = AB : AC,

und folglich muß sich auch zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last verhalten:

Kraft : Last = AB : AC.

W. Z. E. W.

§. 107.

§. 107.

Wenn bey einer schiefliegenden Fläche (fig. 51) die Länge derselben AC zum Radius oder Sinus totus angenommen wird: so ist die Höhe derselben AB der Sinus des Winkels ACB, den die schiefliegende Fläche mit dem Horizonte macht, und den man den Erhöhungswinkel der schiefliegenden Fläche nennen kann. Zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last bey einer schiefliegenden Fläche, wenn die Kraft parallel mit der schiefliegenden Fläche zieht, wird also die Kraft sich zur Last verhalten müssen, wie der Sinus des Erhöhungs Winkels der schiefliegenden Fläche, zum Radius oder Sinus totus.

§. 108.

Wenn aber ferner eine Last auf einer schiefliegenden Fläche ABC (fig. 52) in Ruhe erhalten werden soll, und die Directionslinie der Kraft DI parallel mit der Grundfläche BC geht: so verhält sich jetzt die Geschwindigkeit der Kraft, zur mechanischen Geschwindigkeit der Last, wie die Länge der Grundfläche BC, zur Höhe derselben AB; und folglich muß alsdenn zwischen Kraft und Last ein Gleichgewicht seyn, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie die Höhe der schiefliegenden Fläche AB, zur Länge

der

der Grundfläche derselben BC (§. 81); oder wenn sich nach der Figur verhält:

Kraft : Last = AB : BC.

W. Z. E. W.

§. 109.

Auch hier ist wieder der Winkelhebel DEH; weil aber jetzt nicht der Radius DE, sondern die Perpendiculairlinie EF die Entfernung der Kraft ist (§. 66): so ist eigentlich FEH der Winkelhebel, dessen Bewegungspunct in E ist, und an dessen einem Arme EF die Kraft, an dem andern Arme EH aber die Last, wie vorher, unter rechten Winkeln ziehen. Zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last wird daher in diesem Falle sich verhalten müssen:

Kraft : Last = EH : EF.

Nach geometrischen Gründen aber ist das Viereck FDHE ein rechtwinklichtes Parallelogramm; es ist also: EF = DH.

Und zum Gleichgewichte muß sich demnoch auch verhalten:

Kraft : Last = EH : DH.

Nun aber ist wieder, wie vorher,

$\triangle DEH \sim \triangle EKH$,

folglich verhält sich:

EH : DH = KH : EH.

Ferner

Ferner ist wieder

$$\Delta\, EKH \sim CKG,$$

folglich $KH : EH = KG : GC$.

Endlich ist $\Delta\, GKC \sim ABC$,

folglich $KG : GC = AB : BC$.

Zum Gleichgewichte muß sich also in diesem Falle verhalten:

Kraft : Last $= AB : BC$;

W. Z. E. W.

§. 110.

Wenn bey der schiefliegenden Fläche (fig. 52) die Länge der Grundfläche BC zum Radius oder Sinus totus angenommen wird: so ist die Höhe derselben AB der Tangens des Erhöhungs Winkels der schiefliegenden Fläche. Zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last in diesem Falle wird daher die Kraft sich zur Last verhalten müssen, wie der Tangens des Erhöhungs Winkels der schiefliegenden Fläche zum Radius oder Sinus totus.

§. 111.

Da der Sinus eines Winkels nie so groß seyn kann, als der Radius oder Sinus totus: so wird auch, wenn im erstern Falle (§. 105) die Kraft parallel

rallel mit der schiefliegenden Fläche zieht, freylich immer mehr Kraft erfordert, je grösser der Erhöhungs Winkel der schiefliegenden Fläche ist; indessen ist doch niemals genau eben so viel Kraft als Last nöthig, die Last im Gleichgewichte zu erhalten.

Der Tangens eines Winkels von 45° aber ist schon so groß, als der Radius des Zirkels; und wenn demnoch im letztern Falle (§. 108) die Kraft parallel mit der Grundfläche zieht: so wird schon, wenn der Erhöhungs Winkel der schiefliegenden Fläche nur 45° ist, die zum Gleichgewichte nöthige Kraft der Last gleich seyn müssen. Ist aber der Erhöhungs Winkel gar über 45°: so wird mehr Kraft als Last erfordert, die Last in Ruhe zu erhalten.

§. 112.

Uebrigens ist es jetzt leicht in beyden Fällen, nach der jedesmaligen Beschaffenheit der schiefliegenden Fläche, wenn die Last gegeben ist, die zum Gleichgewichte nöthige Kraft, und umgekehrt, wenn die Kraft gegeben ist, die Last zu finden.

Wenn zuvörderst die Kraft parallel mit der schiefliegenden Fläche zieht (§. 105); schliesse man nur im erstern Falle:

Länge der schiefen Fl. AC : Höhe AB = L. : Kr.

und im andern Falle:

die Höhe AB : Länge AC = Kraft : Last.

Zieht aber 2tens die Kraft parallel mit der Grundfläche der schiefliegenden Fläche (§. 108): so verhält sich im erstern Falle:

die Länge der Grundfläche BC : Höhe AB = Last : Kraft,

im 2ten Falle aber die Höhe AB : Länge der Grundfläche BC = Kraft : Last.

§. 113.

Wenn jetzt aber bey einer schiefliegenden Fläche ABC (fig. 53) die Richtungslinie der Kraft DI weder mit der schiefliegenden Fläche AC, noch mit der Grundfläche BC parallel, sondern zwischen diesen beyden Richtungen fortgeht: so ist OEH der Winkelhebel, und EO ist die Entfernung der Kraft, so wie EH beständig die Entfernung der Last bleibt; und zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last wird jetzt sich verhalten müssen:

Kraft : Last = EH : EO.

Weicht endlich die Richtungslinie der Kraft DI (fig. 54) von der parallelen Richtung DQ nach oben zu ab: so ist PEH der Winkelhebel, und EP ist die Entfernung der Kraft; EH aber ist immer die Entfernung der Last, und zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last in diesem Falle muß sich also verhalten:

Kraft : Last = EH : EP.

Da

Da nun nach geometrischen Gründen sowohl EO (fig. 53), als EP (fig. 54) beyde kleiner sind, als der jedesmalige Radius ED: so hat eine Kraft, welche parallel mit der schiefliegenden Fläche zieht, allemal die gröste Entfernung, und folglich auch das gröste Vermögen; oder bey einer jeden andern Richtung wird eine grössere Kraft erfordert, die Last im Gleichgewichte zu erhalten. Wenn demnach z. B. ein Lastwagen bergan gezogen werden soll: so werden die Pferde die wenigste Kraft anwenden dürfen, wenn die Zugstricke parallel mit der Schräge der Anhöhe oder des Berges gehen.

5. Von der Schraube, (§. 114-117).

§. 114.

Eine Schraube (fig. 19) ist nichts anders, als eine um eine Spindel herumgeführte schiefliegende Fläche (§. 36), bey welcher aber die Kraft parallel mit der Grundfläche derselben zieht; es muß daher auch die Vermehrung der Kraft, welche durch eine Schraube erhalten wird, nach diesem Falle bey der schiefliegenden Fläche (§. 108) bestimmt werden.

Bey der Schraube aber ist die Weite eines Schraubenganges, die Höhe der schiefliegenden Fläche, und die Peripherie der Spindel ist die Länge der

Grundfläche; zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last bey der Schraube muß sich demnach verhalten:
Kraft : Last = Weite eines Schraubenganges : Peripherie der Spindel.

§. 115.

Auch hier bey der Schraube ist wieder der Grund der Vermehrung der Kraft, in der geschwindern Bewegung derselben, im Verhältnisse mit der Bewegung der Last zu suchen. Denn wenn die Schraube genau einmal herumgedrehet wird: so kommt die Last nur um die Weite eines Schraubenganges weiter fort; die Kraft aber geht in derselben Zeit die ganze Länge der Peripherie der Spindel durch. Und je enger oder schmaler demnoch die Schraubengänge einer Schraube in Vergleich mit der Peripherie der Spindel sind, desto mehr wird auch das Vermögen der Kraft durch die Schraube vermehret.

§. 116.

Uebrigens ist noch in Hinsicht der Schraube zu bemerken, daß bey derselben nicht immer, wie bey einer eigentlichen schiefliegenden Fläche, die Last über dieselbe hinauf beweget; sondern daß statt dessen in gewissen Fällen die schiefliegende Fläche unter die Last eingeschoben, und die Last auf diese Weise fortgerückt oder

oder in die Höhe gehoben werden. Wenn z. E. bey einer eigentlichen Schraube mit dem Schraubenmütterchen, die Schraube selbst still steht, und das Schraubenmütterchen von der Kraft herumgedreht wird: so wird die Last über die schiefliegende Fläche hinaufgebracht. Steht aber das Schraubenmütterchen fest, und die Schraube selbst wird von der Kraft hineingeschroben, oder wird eine Schraube ohne Ende von der Kraft an der Spindel herumgedreht: so wird in beyden Fällen die schiefliegende Fläche unter die Last hineingeschoben. In Ansehung der Vermehrung der Kraft durch eine Schraube aber ist es, wie man leicht sieht, vollkommen einerley, ob die Last über die schiefliegende Fläche hinaufgebracht, oder ob diese unter jene eingeschoben wird.

§. 117.

Wenn aber die eigentliche Schraube still steht, und die Kraft das Schraubenmütterchen, wie z. B. bey einer Buchbinderpresse, herumbewegt: so kommt zur Bestimmung des Vermögens der Kraft zum Gleichgewichte mit der Last, die Dicke oder die Peripherie der Spindel ganz und gar nicht mit in Betracht. Denn in diesem Falle ist der Raum oder die Geschwindigkeit der Kraft nicht die Peripherie der Spindel, sondern die Peripherie eines Zirkels, den die Kraft

beym Herumdrehen des Schraubenmütterchens beschreibt; und zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last wird daher jetzt erfodert, daß sich die Kraft zur Last verhalte, wie die Weite eines Schraubenganges zur Peripherie des durch die Kraft mit dem Schraubenmütterchen beschriebenen Zirkels.

6. Vom Keile, (§. 118-121).

§. 118.

Der Keil ist nach der oben (§. 39) gegebenen Erklärung eine doppelte schiefliegende Fläche, dessen man sich hauptsächlich bedient, den Zusammenhang der Theile fester Körper zu trennen, oder 2 neben einander befindlichen Körper gleich weit nach beyden Seiten aus einander zu treiben. Indessen wird der Keil doch auch manchmal gebraucht, blos einen Körper oder eine Last seitwärts fortzuschieben, oder in die Höhe zu heben. Z. E. beym Holzspalten sollen die zusammenhaltenden Fäsern des Holzes durch den Keil von einander gerissen und getrennt werden; durch die so genannten Stellkeile bey einer Kanone aber soll blos das Hintertheil der Kanone etwas in die Höhe gehoben werden. In beyden Fällen wird zwar der Keil, als eine doppelte schiefliegende Fläche unter die Last eingeschoben, oder mit Gewalt eingetrieben; indessen

dessen sind diese beyden Fälle in anderer Hinsicht, wie bald erhellen wird, doch sehr verschieden; und man muß daher bey der Untersuchung und Bestimmung des mechanischen Vermögens eines Keils, dieselben wohl unterscheiden, und einen jeden Fall für sich besonders erwägen.

§. 119.

Wenn nun zuvörderst eine Last, z. E. das Hintertheil der Kanone (fig. 55) durch den Keil ABC in die Höhe gehoben werden soll: so ist klar, daß der Keil mit der einen schrägen Seitenfläche BC ganz auf der Ebene GH liege, und nach der Richtung GH von der Kraft P unter die Last eingeschoben, oder statt dessen gleichsam von der Kraft Q hineingezogen werde. Wenn jetzt aber der Keil etwa von C bis F unter die Last hineingebracht ist: so ist die Kraft um CE fortgerückt, die Last aber um EF in die Höhe gekommen; und eben so würde die Last um die Weite AD in die Höhe gehen, wenn der Keil von C bis A hineingetrieben würde. Der Raum oder die Geschwindigkeit der Kraft verhält sich also hier zum Raume oder Geschwindigkeit der Last unstreitig, wie CE zu EF, oder, welches dasselbe ist, wie CD zu AD; und zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last wird sich demnoch hier verhalten müssen:

Kraft : Last = AD : CD.

In diesem Falle und unter diesen Umständen ist demnoch der Keil ABC eigentlich nichts anders, als eine ordentliche einfache schiefliegende Fläche ADC, wobey die eine schräge Seite des Keils AC die schiefliegende Fläche, die Perpendiculairlinie AD die Höhe, und das Stück der 2ten schrägen Seite des Keils DC die Länge der Grundfläche ist, und wobey die Kraft parallel mit der Grundfläche wirkt.

§. 120.

Wenn aber nach dem 2ten Falle zwey neben und dicht an einander liegenden schweren Körper oder Lasten P und Q (fig. 56) durch einen Keil ABC gleich weit nach beyden Seiten aus einander getrieben werden sollen: so ist augenscheinlich, daß wenn der Keil etwa von C bis EF eingetrieben worden ist, die Lasten P und Q um die Weite EF von einander weggekommen sind; und eben so werden die Lasten P und Q um die ganze Dicke des Keils AB aus einander weichen müssen, wenn der Keil ganz bis AB hineingetrieben wird. Die Last P wird also den Raum AD, so wie die Last Q den Raum BD in eben der Zeit durchlaufen, in welcher die Kraft, welche hier nach der Länge des Keils CD wirkt, den Keil um die Länge desselben CD eintreibt, und also den Raum CD durchläuft. Die Geschwindigkeit der ganzen

Last

Last verhält sich also zur Geschwindigkeit der Kraft, wie die halbe Dicke des Keils AD oder BD, zur ganzen Länge desselben CD; oder welches dasselbe ist, wie die ganze Dicke des Keils AB zur doppelten Länge desselben. Und zum Gleichgewichte zwischen Kraft und Last wird demnoch in diesem Falle sich verhalten müssen;

Kraft : Last = AD : CD,
oder = AB : 2 CD.

§. 121.

Wenn endlich der Zusammenhang der Theile eines festen Körpers durch den Keil, wie z. E. beym Holzspalten (fig. 57) getrennet werden soll: so ist dieser Fall eigentlich in Betracht des mechanischen Vermögens dieser Maschine mit dem zuletzt (§. 120) abgehandelten Falle vollkommen einerley. Denn wenn der Keil ABC ganz bis AB ins Holz hineingetrieben worden ist: so ist die Weite der Oefnung am obersten Ende des Holzes, der ganzen Dicke des Keils AB gleich, und die Theile des Holzes sind also auch daselbst um die halbe Dicke des Keils zu beyden Seiten aus einander gewichen; die Kraft aber ist wieder gleichsam um die ganze Länge des Keils fortgerückt. Der Raum oder die Geschwindigkeit der Kraft verhält sich also auch hier zum Raume oder zur Geschwin-

digkeit

digkeit der Last, wie die Länge des Keils CD zur halben Dicke desselben AD oder BD; oder wie die doppelte Länge des Keils 2 CD, zur ganzen Dicke desselben AB.

Wenn aber ein Stück Holz gespalten wird: so wirkt die Kraft durch den Keil von Anfange bis zu Ende der Arbeit in den Puncten des Holzes E und F; und nur gleich anfänglich ist auch der Widerstand, der von der Kraft durch den Keil überwunden werden soll, unmittelbar in diesen Puncten E und F. So wie aber das Holz immer weiter spaltet: so rückt auch der Punct des Widerstandes immer weiter fort, und die Kraft erhält dadurch eine grössere Entfernung, und gewinnt eben deswegen immer mehr und mehr am Vermögen. Wenn z. E. das Holz etwa erst bis in H gespaltet ist: so ist alsdenn der Widerstand, der jetzt noch weiter durch die Kraft überwunden werden soll, eben daselbst in H, und wird hier von der Kraft in E und F durch den Keil würklich leichter überwunden, als wenn die Spaltung des Holzes noch nicht so weit heruntergegangen ist. Und blos hierin ist also dieser Fall von dem vorigen (fig. 56), wo der Widerstand der beyden Lasten P und Q von Anfang bis zu Ende in gleicher Entfernung von der Kraft, und folglich immer derselbe bleibt, unterschieden.

§. 122.

§. 122 - 134. Abhandlung und Bestimmung des Vermögens einiger zusammengesetzten Maschinen.

§. 122.

Nachdem ich jetzt die einfachen Maschinen gänzlich abgehandelt und gezeigt habe, wie sehr das Vermögen einer Kraft durch eine jede derselben vergrössert werde: so wird es jetzt leicht seyn, wenn mehrere einfache Maschinen mit einander verbunden sind, bey solchen zusammengesetzten Maschinen zu bestimmen, wie groß die Vermehrung der Kraft in einem jeden besondern Falle sey; und folglich auch die Kraft zu berechnen, welche jedesmal nöthig ist, eine bestimmte Last im Gleichgewichte zu erhalten. Folgende Beyspiele können hierin zur Erläuterung und zur Uebung für Anfänger dienen.

1. Von einem Räderwerke, welche durch eine Schraube ohne Ende, mit einer Kurbel bewegt wird.

§. 123.

Wenn eine zusammengesetzte Maschine (fig. 58) etwa aus 2 Rädern besteht, und diese Räde durch eine Schraube ohne Ende mit einer Kurbel bewegt

wegt werden; und alsdenn das Verhältniß der Kraft Q an der Kurbel, zum Gleichgewichte mit einer Last P an der Welle des ersten Rades bestimmt werden soll: so ist leicht einzusehen, daß man nur

1. finden dürfe, wie oft die Kurbel herumgedrehet werden müsse, bevor das Rad, auf dessen Welle die Last aufgewunden wird, einmal herumkommt. Alsdenn muß man

2. bestimmen, wie vielmal die Peripherie, welche die Kurbel in der Bewegung beschreibt, grösser ist, als die Peripherie der Welle, woran die Last hängt. Hierauf werden

3. diese beyden gefundenen Zahlen mit einander multiplicirt, und das Product zeigt an, wie vielmal in der Bewegung der Raum oder die Geschwindigkeit der Kraft Q grösser sey, als der Raum oder die Geschwindigkeit der Last P; und folglich, wie vielmal die Kraft Q an der Kurbel kleiner seyn könne, als die Last P an der Welle des ersten Rades, diese Last im Gleichgewichte zu erhalten. Mithin darf man nur endlich

4. die Last durch diese gefundene Zahl dividiren: so zeigt der Quotient die Kraft Q an, welche an der Kurbel erfordert wird, die Last P ruhend zu erhalten.

Es

Es sey z. Ex. der Radius der Welle AB = 6″
die Anzahl der Zähne dieses Rades - = 72
der Triebstöcke des 2ten Rades = 6
der Zähne dieses Rades - = 60
die Länge der Kurbel CD - - = 12″
und endlich die Last P = 10000 ℔:
so ist die Geschwindigkeit des 2ten Rades 72 : 6 = 12 mal grösser, als die Geschwindigkeit des ersten Rades.

Das 2te Rad aber geht nur um einen Zahl fort, wenn die Kurbel einmal ganz herumgedrehet wird; es muß daher die Kurbel 60 mal rund gehen, ehe das 2te Rad einmal herumkommt; und folglich muß die Kurbel 60 × 12 = 720 mal rund gedrehet werden, ehe das erste Rad einmal herumkommt.

Da nun ferner die Länge der Kurbel = 12″ und der Radius der Welle AB = 6″ ist; die Peripherien zweyer Zirkel sich aber, wie ihre Radien verhalten: so ist die Peripherie der Kurbel auch doppelt so groß, wie die Peripherie der Welle des ersten Rades. Wenn demnoch diese Maschine bewegt wird: so ist die Geschwindigkeit der Kraft Q an der Kurbel 720 × 2 = 1440 mal grösser, als die Geschwindigkeit der Last P an der Welle des ersten Rades.

Man

Man dividire also endlich nur die Last = 10000 ℔ durch 1440: so giebt der Quotient = $6\frac{17}{18}$ ℔ die Kraft, welche an der Kurbel nöthig ist, die Last im Gleichgewichte zu erhalten.

2. Von einem Krahne oder Kraniche, (§. 124-125.)

§. 124.

Wenn grosse und schwere Lasten, z. E. schwere Mühlensteine oder grosse Kanonen, aus einem Schiffe herausgehoben, und ans Land gebracht werden sollen: so bedient man sich hierzu gemeiniglich eines so genannten Krahns oder Kranichs, (fig. 59).

Ein solcher Krahn ist eine zusammengesetzte Maschine, welche gemeiniglich aus einem Rade an einer Axe A, und einem Flaschenzuge B besteht, und sich um die geradstehende Säule C, wie eine Mühle, wenn sie nach dem Winde gedreht wird, herumdrehen läßt, damit die Last nicht nur in die Höhe gehoben, sondern auch bequem ans Land gebracht, und daselbst wieder niedergelassen werden könne. Das Rad an der Axe wird gewöhnlich durch einen oder ein Paar Menschen, die darin, oder vielmehr seitwärts an dem äussersten Umkreise desselben gehen, in Bewegung gesetzt.

§. 125.

Die Berechnung des Verhältnisses zwischen der Kraft und der Last zum Gleichgewichte bey diesem Werkzeuge ist sehr leicht, und geschieht folgendermaassen.

Wenn in dem Flaschenzuge B etwa 3 Rollen oben und 2 Rollen unten sind: so wird dadurch zuerst eine 5fache Vermehrung der Kraft erhalten, (§. 98).

Wenn nun aber ferner der Diameter des Rades A etwa 12 Fuß, und der Diameter der Axe desselben nur anderthalb Fuß ist: so giebt dieses wieder eine 8malige Vermehrung der Kraft (§. 91); und folglich wird im Ganzen das Vermögen der Kraft, unter den angenommenen Umständen und Maassen 8 × 5 = 40 mal vergrössert.

Die Kraft kann also einer 40 mal grössern Last durch einen solchen Krahn das Gleichgewicht halten; und umgekehrt, wenn man das Gewicht der Last in diesem Falle nur durch 40 dividirt: so erhält man die Kraft, welche an der Peripherie des Rades nöthig ist, der gegebenen Last das Gleichgewicht zu halten.

3. Von zwey verschiedenen Artillerie-Krahnen, (§. 126-134).

§. 126.

Wenn man bey der Artillerie das schwere Geschütz aus den Lafetten heben, oder auf dieselben auflegen will: so bedient man sich hierzu gemeiniglich eines Hebezeuges, welches man auch, wegen der Uebereinstimmung mit einem ordentlichen Krahne in Ansehung der einfachen Maschinen, woraus dasselbe zusammen gesetzt ist, einen **Artillerie-Krahn** zu nennen pflegt.

Aus der Vorstellung (§. 60) erhellet, daß bey diesem Krahne ebenfalls ein Flaschenzug, anstatt eines ordentlichen Rades an einer Axe aber nur eine horizontale Welle sich befinde. Weil aber hier die Last, wenn sie erst in die Höhe gebracht, und alsdenn die Lafette beym Abnehmen des Geschützes von derselben bey Seite, beym Auflegen aber im Gegentheil herbey geschafft worden ist, nur auf eben der Stelle wieder niedergelassen werden soll: so braucht der obere Theil dieses Hebezeuges nicht, wie bey einem ordentlichen Krahne, herumgedrehet werden zu können; und wird daher auch, weil eben diese Einrichtung wahrscheinlich die Ursache der Benennung

eines

eines Krahns oder eigentlich eines Kranichs ist, sehr uneigentlich ein Krahn genannt.

§. 127.

Die Berechnung des Verhältnisses der Kraft zur Last zum Gleichgewichte bey diesem Artillerie-Hebezeuge ist genau eben so, wie bey dem ordentlichen Krahne.

Wenn erstlich in dem Flaschenzuge CD etwa 2 Rollen oben, und 2 Rollen unten sich befinden: so giebt dies eine 4fache Vermehrung der Kraft (§. 98).

Wenn hierauf aber ferner der Radius der horizontalen Welle etwa 6 Zoll ist, und die Länge der Handspeiche H, von der Mitte der Welle ab angerechnet, 36 Zoll beträgt: so giebt dies eine 6malige Vermehrung der Kraft (§. 95).

Durch diesen Krahn wird demnoch bey den angenommenen Maassen eine 24malige Vermehrung der Kraft erhalten; und wenn man also das Gewicht der Last durch 24 dividirt: so giebt dies die Kraft, welche an der Handspeiche erfodert wird, die gegebene Last im Gleichgewichte zu erhalten.

§. 128.

Wenn mit dem Artillerie-Krahne die größten und schwersten Kanonen aus und in die Lafetten gehoben werden sollen: so muß

1. das ganze Gestell desselben so groß seyn, daß eine Kanone auf der Lafette bequem darunter stehen, und auch noch aus den Schildzapfen ein wenig in die Höhe gehoben werden könne.
2. Ferner muß das ganze Gestell in allen seinen Theilen stark genug seyn, bey der Last des schwersten Geschützes, welches man damit heben will, halten zu können; und es müssen folglich sowohl die aufrechtstehenden Stützen oder die sogenannten Beine des Krahns, welche oben bey A gleichsam in einem Puncte zusammenlaufen, und durch einen starken eisernen Bolzen zusammen gehalten werden, als die horizontalliegende Welle eine hinlängliche Dicke und Stärke haben.
3. Je leichter indessen der Krahn seyn kann, desto leichter kann er auch von einem Orte zum andern fortgeschafft, und desto bequemer kann er, wenn er gebraucht werden soll, zusammengesetzt und aufgerichtet werden. Der Leichtigkeit wegen läßt man daher auch vielfältig den Krahn nur aus 3, anstatt aus 4 Stützen

oder

oder Beinen bestehen; allein ein solcher 3beinigter Krahn kann sehr leicht umstürzen, und es kann dadurch grosser Schaden verursacht werden. Zu dem größten und schwerersten Geschütze ist es daher immer rathsamer, sich eines 4beinigten Krahnes zu bedienen.

4. Damit endlich die Last, wenn sie am Flaschenzuge frey hängt, auch alsdenn noch, wenn die Kraft an der Handspeiche nachläßt, still hangen, und nicht von selbst wieder herabsinken könne: so wird an der Welle ein Sperrad E angebracht, worin ein an dem einen Unterstützungs-Balken des Krahns befestigter Hacken einfällt, und die Welle aufhält, daß sie nicht von selbst zurücklaufen, und folglich die Last auch nicht von selbst wieder heruntergehen könne.

§. 129.

Je dünner die horizontale Welle eines Krahns ist, desto mehr wird das Vermögen der Kraft an der Handspeiche vergrössert. Wenn nun aber der grossen Lasten wegen diese Welle, wie gesagt, sehr stark und dick seyn muß; und die Handspeichen, womit die Welle herumgedrehet wird, doch immer nur dieselbe bestimmte Länge haben können: so ist klar, daß

die

die Kraft eben dadurch, daß die Welle so dick ist, am Vermögen verliehrt. Diesen Nachtheil hat man nun durch folgende besondere Einrichtung der Welle zu heben, und den Abgang der Kraft wieder zu ersetzen; oder überhaupt durch diese Einrichtung eine grössere Vermehrung der Kraft zu bewirken gesucht.

§. 130.

Gesetzt eine Last, welche durch den Krahn in die Höhe gebracht werden soll, erfordere eine Dicke der Welle von 12 Zoll im Durchmesser: so mache man nur die eine Hälfte der Welle (fig. 61) würklich 12 Zoll dick; die andere Hälfte aber etwa um die Hälfte dicker, und also 18 Zoll im Durchmesser. Hierauf befestige man das Tau des Flaschenzuges, welcher eine Rolle mehr in dem obern Kloben, wie in dem untern haben muß, mit dem einen Ende an die dünnere Hälfte der Welle, und umwikle dieselbe ganz mit dem Taue, und wenn alsdenn der untere Kloben des Flaschenzuges bis zu der Last heruntergezogen, und daran befestigt ist: so befestige man das andere Ende des Taues an die dickere Hälfte der Welle. Wenn nun die Welle von der Kraft an der Handspeiche herumgedrehet, und das Tau auf die dickere Hälfte der Welle aufgewunden wird: so windet es sich von der dünnern Hälfte ab. Weil aber

dadurch

dadurch doch mehr Tau auf die dickere Welle auf, als von der dünnern abgewunden wird: so wird dadurch die Last am Flaschenzuge in die Höhe gebracht.

§. 131.

Wenn jetzt das Verhältnis der Kraft zur Last zum Gleichgewichte bey einem solchen Krahne berechnet werden soll: so ist leicht einzusehen, daß dieses folgendergestalt geschehen müsse.

1. Wenn erstlich die Welle einmal herumgedrehet wird: so werden von der dünnern Hälfte der Welle ohngefehr $3 \times 12 = 36$ Zoll Tau ab, und im Gegentheil $3 \times 18 = 54$ Zoll Tau auf die dickere Hälfte aufgewunden; und also 18 Zoll Tau mehr auf die Welle im Ganzen auf, als von derselben abgewunden. Die 4 parallelgehenden Theile des Taues bey einem Flaschenzuge, wobey 3 Rollen in der obern Flasche, nur 2 aber in der untern sind, müssen daher auch im Ganzen 18 Zoll, und also jeder $4\frac{1}{2}$ Zoll kürzer, und folglich die Last dadurch $4\frac{1}{2}$ Zoll in die Höhe gezogen werden.
2. Wenn aber ferner die Welle einmal rund geht: so ist der Umkreis des Zirkels, den die Hand-

speiche beschreibt, und also der Raum, den die Kraft durchläuft, $6 \times 36 = 216$ Zoll.

3. Die Geschwindigkeit der Kraft ist also im Ganzen $216 : 4\frac{1}{2} = 48$mal grösser, als die Geschwindigkeit der Last; und folglich kann eine Kraft einer 48mal grössern Last das Gleichgewicht halten; oder wenn man die Last durch 48 dividirt: so giebt dies die Kraft, welche erfordert wird, die Last im Gleichgewichte zu erhalten.

§. 132.

Diese jetzt eben (§. 130) erklärte Beschaffenheit der Welle bey einem Artillerie-Krahne giebt also, wenn der Durchmesser der dickern Hälfte der Welle nur um die Hälfte grösser ist, als der Durchmesser der dünnern Hälfte, und diese eine Dicke von 12 Zoll haben muß; oder wenn in diesem Falle der grössere Durchmesser sich nur zu dem kleinern verhält, wie 3 zu 2, schon eine doppelte Vermehrung der Kraft, und 1 Mann wird also eine Last in die Höhe winden können, wozu sonst 2 Mann erfordert wurden.

Ueberdem ist gemeiniglich mit dieser Einrichtung noch der Vortheil verbunden, daß die Last, wenn sie am Flaschenzuge frey in der Luft hängt, nicht von sich selbst wieder herabsinken könne, wenn gleich

die Kraft an der Handspeiche zu wirken aufhört, und man also kein Sperrad an der Welle nöthig habe. Die Ursache hiervon aber ist doch eigentlich nur die Reibung in den verschiedenen Theilen der Maschine; und wenn daher gar keine Reibung bey der Maschine wäre: so würde auch dieser Vortheil nicht statt finden. Freylich kann die Reibung in den einzelnen Theilen der Maschine leicht so groß seyn, daß dieser Vortheil würklich dadurch erhalten wird, und daß also die Reibung in diesem Falle gewissermaassen nützlich ist, anstatt daß sie sonst immer bey Maschinen Schaden und Nachtheil verursacht. Da man aber indessen beständig suchen muß, die Reibung einer Maschine so sehr zu verringern, als nur immer möglich ist: so wird es doch wohl rathsam und sicherer seyn, auch bey dieser Welle das Sperrad nicht wegzulassen.

§. 133.

Eine solche vortheilhafte Einrichtung der Welle aber kann nicht einzig und allein bey einem Artillerie-Krahne statt finden; sondern man kann sich auch derselben in vielen andern Fällen, und bey andern Maschinen oftmals sehr vortheilhaft bedienen. Wenn z. E. grosse Kanonen oder andere schwere Lasten auf Schlitten oder Wägen nicht nur seitwärts auf einer

horizontalen Ebene, sondern insonderheit auch bergan oder über Auffahrten an solchen Oertern, wo man wegen Mangel des Platzes, wie etwa in engen Festungswerken, nicht viele Leute anstellen, noch weniger aber sich mehrerer Pferde bedienen kann, fortgebracht werden sollen: so kann man bey einer Winde (fig. 62) eine solche Welle leicht anbringen, und dadurch einen grossen Vortheil der Kraft gewinnen.

§. 134.

Endlich liesse sich auch noch in allen Fällen bey der Welle statt der Handspeichen ein Rad mit Zähnen anbringen; und wenn alsdenn dieses Rad durch eine Schraube ohne Ende mit einer Kurbel in Bewegung gesetzt würde: so würde dies eine grosse Vermehrung der Kraft geben.

Die Vermehrung der Kraft in einem solchen Falle läßt sich übrigens jedesmal nach den bisher abgehandelten Gründen leicht finden und berechnen.

§. 135-140. Einige algemeine Bemerkungen wegen Einrichtung der Maschinen in Hinsicht der Kräfte, wodurch die Maschinen in Bewegung gesetzt werden.

§. 135.

Bisher ist das Verhältnis der Kräfte zum Gleichgewichte nicht nur bey den einfachen, sondern

auch

auch bey einigen der bekanntesten und gebrauchlichsten zusammengesetzten Maschinen gezeigt, und nach unumstößlichen Gründen dargethan und bewiesen worden. Man wird daher auch jezt leicht im Stande seyn, von andern vorkommenden Maschinen und mechanischen Werken, deren es freylich im gemeinen Leben unzählige giebt, richtig zu urtheilen, und bey denselben immer genau zu bestimmen, um wie viel eine Kraft durch die angebrachten Maschinen vermögender gemacht worden sey, als sie an und vor sich war.

Verschiedene Sachen aber werden als Kräfte gebraucht, Maschinen zu bewegen. So ist bekannt genug, daß es sowohl Wasser- als Windmühlen, wie auch Pferde- und Handmühlen giebt. Hausuhren werden ferner durch Gewichter, so wie Tafel- und Taschenuhren durch Federn in Gang gebracht und bewegt; und endlich kann man sich auch nach des Dampfes von kochendem Wasser, als einer Kraft bey Maschinen sehr vortheilhaft bedienen.

Je nachdem aber nun diese oder jene Kraft angewandt werden soll, muß auch das erste Rad, woran die Kraft unmittelbar wirkt, seine eigene und besondere Einrichtung haben. Von einer jeden dieser Einrichtungen aber hier ausführlich und practisch zu handeln, würde wider meine Absicht seyn, und auch zu

einer

einer gar zu grossen Weitläuftigkeit führen. Blos einige algemeine Bemerkungen in Ansehung der verschiedenen Kräfte werde ich hier noch hinzufügen, und zum Unterrichte für Anfänger hier mitanführen.

1. Von Wind- und Wassermühlen, und von Dampfmaschinen.

§. 136.

Wenn zuvörderst bey grossen zusammengesetzten Maschinen und Werken, wie z. B. bey Pulver- Papier- oder Stampfmühlen, und andern dergleichen Fabriquen, eine grosse Kraft erfordert wird, dieselben in Bewegung zu setzen: so dürfte überhaupt wohl nur von Wind- oder Wassermühlen, und Dampfmaschinen die Rede seyn. Von denen dazu gebrauchten Kräften aber hat doch wohl unstreitig das Wasser, wenn man es anders haben, und als Kraft anbringen kann, in den meisten Fällen vor den übrigen beyden Kräften den Vorzug. Bey Ströhmen und starken Bächen können oftmals die größten Werke durch den Fluß und Fall des Wassers in Bewegung gesetzt werden; und überdem ist damit der Vortheil verbunden, daß das Wasser gar nichts, und die erste Einrichtung und Unterhaltung einer Wassermühle auch wenigstens wohl bey weiten nicht so viel, als bey einer

Dampf-

Dampfmaschine kostet; dabey aber doch gemeiniglich eine beständige und anhaltend wirkende Kraft abgiebt.

Der Wind ist freylich eben so wohlfeil, als das Wasser; allein selten so stark, und niemals so beständig. Windmühlen müssen oftmals, wie die Erfahrung lehrt, aus Mangel am Winde, mehrere Tage, ja Wochen lang, still stehen. Weil übrigens der Wind veränderlich ist, und bald aus einer, bald aber aus einer andern Gegend weht: so muß eine Windmühle, damit der Wind die Flügel immer gerade zu fassen möge, herumgedrehet werden können. In alten Zeiten wurde zu dieser Absicht das ganze Mühlenhaus mit der Welle, woran die Flügel befestigt sind, auf einem Zapfen gebaut, und auf demselben herumgedreht. In den neuern Zeiten aber wird das Mühlenhaus fest stehend gebaut, und blos das Dach desselben wird mit den Flügeln und ihrer Welle herumgedreht. Diese letzte Art ist zuerst in Holland allgemein im Gebrauche gewesen, und solche Mühlen werden daher gemeiniglich holländische Windmühlen; jene alte Art Mühlen aber schlechthin Windmühlen genannt.

Eine Dampfmaschine hat eine sehr starke Kraft; bey derselben aber ist nicht nur die erste Einrichtung und Anschaffung mit grossen Kosten verbunden, sondern die beständige Unterhaltung des nöthi-

gen

gen Feuers bey dem Gebrauche derselben ist immer sehr kostbar.

2. Von kleinern Mühlen, die durch Pferde und andere Thiere, oder durch Menschen bewegt werden.

§. 137.

Durch Pferde oder andere Thiere und durch Menschen können ferner überhaupt nur kleine mechanische Werke in Bewegung gesetzt werden. So hat man z. E. kleine Kornmühlen, Dreschmachinen und andere dergleichen Räderwerke, welche von Pferden gezogen werden; und so wird ein Krahn dadurch, daß ein oder ein Paar Menschen in einem Rade gehen, blos durch das Gewicht derselben bewegt, und ganz kleine Räderwerke, z. B. die jetzt von dem geschickten Mechaniker, Hr. Volgaud, Prediger zu Nørbye bey Callundburg in Seeland neu erfundene Häckselschneidemaschine, werden vermittelst einer oder zwoer Kurbeln durch Menschenhände in Bewegung gesetzt.

Sowohl die Pferde und andere Thiere, als die Menschen, kosten viel zu unterhalten, und sind dennoch immer kostbare Kräfte. Wenn indessen entweder Thiere oder Menschen, als Kräfte bey Maschinen

schinen gebraucht werden müssen: so müßte man sich doch wohl eher, wenn es sich thun läßt, eines oder mehrerer Thiere, als eines oder mehrerer Menschen bedienen. Denn geschweige, daß es doch wohl immer weniger kostet, die für eine Maschine nöthigen Pferde, als die dazu erforderlichen Menschen zu unterhalten: so ist überdem der Mensch das edelste Geschöpf, und dessen Kräfte können immer, wenn man sie nur gehörig zu leiten und zu benutzen weiß, besser genutzt, und zu edlern Verrichtungen, wozu kein unvernünftiges Thier taugt, gebraucht werden.

Wenn übrigens eine Maschine durch Pferde bewegt wird, und sie daher in einem kleinen Kreise beständig rund gehen müssen: so werden sehende Pferde immer schwindlicht. Man bedient sich daher blinder Pferde, oder bindet sehenden Pferden etwas vor die Augen.

3. Von Räderwerken, welche blos durch Gewichter in Bewegung gesetzt werden.

§. 138.

Ganz im kleinen endlich, und insonderheit bey Maschinen, bey denen eine gleichförmige anhaltende Bewegung statt finden soll, wie z. E. bey Haus- Tafel- und Taschenuhren, und zum Theil bey Bra-

tenwendern u. s. w. bedient man sich als Kräfte der blossen Gewichter, oder einer so genannten Feder.

Wenn das Gewicht einer Hausuhre, wie man sagt, abgelaufen ist: so muß es jedesmal durch eine andere Kraft wieder in die Höhe gewunden werden; und eben dieser Umstand verursacht, daß blosse Gewichter nicht als Kräfte bey grossen Werken, bey denen sehr viel Kraft, sie in Bewegung zu setzen, erfordert wird, gebraucht werden können.

Wenn nun aber die abgelaufenen Gewichter z. E. einer Hausuhre, wieder aufgewunden werden sollen: so wird blos die Welle, worauf die Kette oder Schnur aufgewunden wird, und nicht das Rad an derselben mit rund gedreht. Das Rad selbst muß daher auch nicht auf der Welle fest sitzen; sondern es wird blos durch eine an der Welle angebrachte Sperrfeder verhindert, daß es nach der entgegengesetzten Seite nicht ohne die Welle herumgehen kann.

4. Vom Räderwerke, wobey die bewegende Kraft eine so genannte Feder ist, (§. 139-140).

§. 139.

Tafel- und Taschenuhren werden durch Federn bewegt. Wenn ein Körper die Eigenschaft oder das

innere

innere Vermögen besitzt, daß er, nachdem er von einer äussern Kraft zusammengedruckt oder gebogen wurden ist, sich von selbst, sobald diese Kraft zu wirken nachläßt, wieder ausdehnt, und seine vorige Gestalt annimmt: so nennt man ihn einen elastischen Körper, oder sagt von ihm, daß er Elasticität oder eine Federkraft habe.

Bedient man sich dieser Eigenschaft eines Körpers, eine oder die andere Bewegung hervorzubringen: so wird der Körper selbst eine Feder genannt. Fast alle Körper haben eine mehr oder weniger starke Elasticität; durch die Erfahrung aber ist ausgemacht, daß von denen Körpern, die eine starke Elasticität oder Federkraft haben, der Stahl am bequemsten sey, die erforderliche Figur einer Uhrfeder anzunehmen; es werden daher die Uhrfedern aus Stahl verfertiget. Eine solche Uhrfeder liegt bey einer Uhre gewöhnlich in einem cylindrischen Gehäuse, welches von den Uhrmachern die Tronmel genannt wird.

§. 140.

Die Federkraft einer Uhrfeder aber ist anfänglich, wenn sie erst aufgewunden worden ist, am stärksten, und nimmt nach und nach, so wie sie abläuft, wieder ab. Dessen ohneractet aber soll doch durch sie eine gleichförmige Bewegung der Uhre bewirkt

wirkt werden; und dieses erhält man dadurch, daß man die Entfernung der Kraft vom Mittelpuncte der Bewegung in eben dem Verhältnisse zunehmen läßt, wie die Kraft der Feder selbst abnimmt. In dieser Absicht wird daher die Welle, um welche die Kette, wenn man die Uhre aufzieht, aufgewunden, und von der sie durch die Kraft der Feder abmählich wieder abgewunden wird, nicht cylindrisch, sondern kegelförmig verfertiget. Damit alsdenn aber auch die Kette gehörig darauf aufgewunden werden, und nicht an derselben unregelmäßig herabglitschen könne; so werden desfalls Einschnitte in die Welle gemacht, oder sie wird, wie man sagt, schneckenförmig gemacht.

§. 141-142. Vom Schwungrade.

§. 141.

Endlich und zuletzt ist noch in Hinsicht aller Kräfte, insonderheit aber in Hinsicht dererjenigen, welche nicht gleichförmig, oder beständig mit gleicher Kraft wirken, wenn z. E. ein Räderwerk durch menschliche Hände vermittelst einer oder zwoer Kurbeln bewegt wird, zu erwägen, wie man in einem solchen Falle dennoch die Bewegung gleichförmig machen könne; oder wenn überhaupt eine Kraft gänzlich zu wirken aufhört, wie alsdenn zu bewirken sey, daß

die

die Bewegung der Maschine dennoch eine Zeitlang gleichförmig beybleibe, und nur langsam oder almählich im Ganzen abnehme, damit keine nachtheilige Stockung in den einzelnen Theilen des ganzen Räderwerkes entstehe.

Hierzu dienen denn nun die sogenannten Schwungräder. Wenn man bey einem Räderwerke ein eigenes Rad anbringt, welches in kein Getriebe eingreift, oder durch sonst etwas an dem Umkreise desselben in seiner Bewegung aufgehalten wird: so wird dasselbe, wenn es erst einmal in Bewegung gesetzt ist, und wenn gleich die Kraft alsdenn auch zu wirken aufhört, sich dennoch eine Zeitlang fortbewegen, und nur almählich langsamer gehen, und zuletzt still stehen. Eben diese Bewegung erhält denn auch das ganze Räderwerk in allen einzelnen Theilen desselben, und dieses Rad wird alsdenn ein Schwungrad genannt.

§. 142.

Man sieht leicht ein, daß je grösser ein Schwungrad ist, desto grösser ist auch bey einerley Geschwindigkeit der Maschine im Ganzen die Geschwindigkeit an dem Umkreise desselben. Je schwerer aber überdem das Rad an dem Umkreise gemacht wird, desto länger wird es im Stande seyn, die Be-

wegung beyzubehalten; und darnach läßt sich also die nöthige Beschaffenheit und Einrichtung eines Schwungrades leicht erklären und bestimmen.

Uebrigens braucht ein Schwungrad eben kein vollständiges und ordentliches Rad zu seyn; blos einzelne Stangen, welche die Welle durchkreuzen, und an den äussersten Enden mit Eisen oder Bley beschwert sind, wie man solches häufig an Bratenwendern und Scheerenschleifer Rädern sieht, können eben so gut ein vollkommenes Schwungrad abgeben.

§. 143 = 148. Von der Reibung oder Friction bey Maschinen.

§. 143.

Schon oben (§. 132) bey Betrachtung der besondern Einrichtung bey der Welle eines Artillerie-Krahns habe ich von einer Reibung in den verschiedenen, sich einander berührenden Theilen der Maschine geredet; und dieselbe als die Ursache oder Kraft angegeben, wodurch die Last, wenn sie am Flaschenzuge des Krahns frey in der Luft hienge, erhalten werde, daß sie nicht von sich selbst wieder herabsinken könne, wenn gleich die Kraft an der Handspeiche zu wirken aufhöre. Eine solche Reibung findet nun überhaupt bey allen möglichen Maschinen, nach Be-

schaffenheit der Umstände mehr oder weniger statt; und die bisher bestimmten Verhältnisse der Kräfte zum Gleichgewichte bey den Maschinen sind daher nicht hinreichend, das nöthige Verhältnis der Kraft zur Last zu bestimmen, wenn die Last würklich bewegt werden soll; sondern alsdenn muß die Kraft, welche jedesmal erfordert wird, die Reibung der Maschine zu überwinden, mit in Betracht gezogen werden.

Es ist aber nicht leicht, diese Kraft in einem jeden Falle genau zu bestimmen; indessen will ich jetzt doch noch kürzlich zeigen, worin die Reibung eigentlich bestehe, und wie sie durch allerhand Umstände und Mittel vermindert werden könne.

§. 144.

Eine Last oder überhaupt einen Körper seitwärts horizontal fortzubewegen, habe ich schon oben (§. 35) angemerkt, daß dazu eigentlich gar keine Kraft erfordert werde. Indessen lehrt doch die Erfahrung, daß wenn ein Körper z. E. das Parallelopipedum CE (fig. 63) über eine horizontale ebene Seitenfläche eines andern festliegenden Körpers GH fortgezogen werden soll, dazu doch immer, nach Beschaffenheit der sich einander berührender Flächen des fortzubewegenden und des stillliegenden Körpers, mehr oder weniger Kraft erfodert werde. Der Widerstand

des

des fortzubewegenden Körpers wird durch die Unebenheiten der Flächen, welche sich einander berühren, verursacht. Die Oberfläche eines physischen Körpers kann nemlich nie so vollkommen glatt und eben gemacht werden, daß gar keine Erhöhungen und Vertiefungen in derselben statt finden sollten. Wenn nun ein Körper mit einer Seite auf einer dem Anscheine nach ebenen sowohl horizontalen als schiefliegenden Seitenfläche eines andern Körpers liegt: so werden von dem Gewichte des aufliegenden Körpers seine Erhöhungen oder hervorragenden Theile in die Vertiefungen der Fläche, worauf er liegt, eingedruckt; und wenn unter solchen Umständen der Körper über die Fläche, worauf er liegt, fortgezogen werden soll: so muß die Kraft entweder ihn aus den Vertiefungen herausheben, oder die hervorragenden Theile niederdrücken, oder gar abbrechen; und man sagt alsdenn, daß die Körper sich an einander reiben, oder der daher rührende Widerstand, der von der Kraft überwunden werden soll, wird kurz die **Reibung** oder **Friction** genannt.

§. 145.

Die Reibung zweyer Körper an einander wird indessen nicht immer durch den verticalen Druck der Schwere eines Körpers verursacht: sondern es können

nen 2 Körper, welche über, oder dicht neben einander fortbeweget werden sollen, auch durch andere Ursachen oder Kräfte, und nach verschiedenen Richtungen an einander gedruckt werden; und folglich sich an einander reiben, oder eine Reibung verursachen. So reiben z. E. die Zähne und Triebstöcke eines Räderwerkes, wenn die Maschine bewegt wird, sich an einander, und werden doch nicht durch die Schwere derselben an einander gedruckt; und die Reibung ist daher überhaupt eine Kraft, welche einen bewegten Körper während seiner Bewegung nach einer andern Richtung, als wornach er fortgeführet werden soll, an den Körper, über den er fortbewegt wird, hinandruckt oder presset.

§. 146.

Die Grösse der Reibung ist bey verschiedenen Körpern, und nach Beschaffenheit der Umstände oftmals sehr verschieden, und läßt sich nicht allgemein bestimmen. Die Erfahrung lehrt, daß die Grösse der Reibung bey den meisten Körpern oder Materien, wenn die Seitenflächen nur einigermaassen polirt sind, ohngefehr den 3ten Theil des Drucks gegen die Fläche betragen, und man nimmt auch gemeiniglich dieses Verhältnis bey Berechnung der Reibung an. Nach Beschaffenheit der Umstände aber kann die Reibung

auch viel kleiner seyn. Wenn z. E. ein stark beladener Schlitten gut mit Eisen oder Stahl unterlegt oder beschlagen ist, und auf dem glatten Eisen fortgezogen wird: so kann dies mit einer sehr kleinen Kraft in Vergleichung mit der ganzen Last geschehen.

§. 147.

Schon oben (§. 132) ist angemerkt worden, daß die Reibung in gewissen Fällen nützlich seyn könne. Ausser dem daselbst angeführten Falle erwäge man ferner nur, daß Spinnräder, Drechselbänke und dergleichen Sachen mehr, ohne Reibung nicht statt finden können. Indessen ist die Reibung wieder in sehr vielen andern Fällen, und insonderheit bey Maschinen oftmals sehr nachtheilig und schädlich. Man bemerke daher noch nur folgende Mittel, wodurch dieselbe vermindert werden kann.

1. Die Erfahrung lehrt, daß Körper von einerley Materie, z. E. Eisen auf Eisen, Messing auf Messing, Holz auf Holz u. s. w., sich stärker reiben, als Körper von verschiedenen Materien, z. E. Eisen auf Messing, Holz auf Metall u. s. w. Die Unebenheiten gleichartiger Körper greifen nemlich tiefer in einander ein, oder passen genauer zusammen, als bey ungleichartigen Körpern. Man lasse daher immer

mer so viel wie möglich ist, ungleichartige Körper, z. E. Eisen auf Messing, hartes Holz auf Metall, oder wenigstens auf Holz von einer andern Art sich reiben.

2. Da die Grösse der Reibung hauptsächlich von der grössern oder kleinern Unebenheit der sich einander berührenden Flächen abhängt: so sucht man, die sich an einander reibenden Flächen einer Maschine so eben und glatt zu machen, als nur immer möglich ist.

3. Ferner wird die Reibung vermindert, wenn man die sich an einander reibenden Flächen mit einer fetten Materie, z. E. mit Oel, Seife, Talg oder auch nur bey grossen Maschinen mit der gewöhnlichen Wagenschmiere bestreicht, weil dadurch die Unebenheiten oder Vertiefungen ausgefüllt werden.

4. Die Reibung bey den Achsen der Räder und bey den Lagerzapfen des groben Geschützes wird verringert, wenn man sie von so kleinen Durchmessern macht, als die Schwere der Last, die sie tragen sollen, es nur immer erlauben will.

5. Bey den Zähnen der Räder und den Getrieben der Wellen ist die Reibung immer kleiner, je mehr Zähne und Triebstöcke bey einerley Grösse der Räder und Wellen dabey angebracht

werden. Die vollkommenste Gestalt der Zähne ist, wenn sie an den äussersten Enden nach der Figur einer Cycloide abgerundet werden.

6. Endlich wird die Reibung auch noch immer sehr vermindert, wenn eine schleifende Bewegung einer Last in eine rollende oder fortwälzende Bewegung verwandelt wird; indem man Rollen oder Walzen unterlegt, und die Last über dieselben fortbringt.

§. 148.

Die Grösse der sich einander berührenden Flächen hat man übrigens auch noch vielfältig geglaubt, habe auf die Grösse der Reibung einen Einfluß; und man hat behauptet, daß je kleiner diese Flächen seyn könnten, desto geringer würde auch die Reibung seyn müssen. Allein die Erfahrung lehrt, daß es einerley sey, ob der Körper CF (fig. 63) mit der grössern Seitenfläche ABCD, oder mit der kleinern ABFE auf der Fläche GH aufliege; und daß in beyden Fällen gleichviel Kraft erfodert werde, den Körper fortzuziehen. Es werden also die wenigern Puncte der kleinern Seitenfläche so viel stärker gegen die untere Fläche gedruckt, und verursachen daher

einen

einen eben so grossen Widerstand oder Reibung, als die mehrern Puncte der grössern Seitenfläche.

§. 149-165. Weitere Abhandlung der Lehre, den Schwerpunct in verschiedenen Linien, Ebenen und Körpern geometrisch zu finden.

§. 149.

Als ein Anhang zur Statick will ich jetzt noch zeigen, wie der Schwerpunct in verschiedenen andern geometrischen Linien, ebenen Figuren und Körpern, als von denen ich es schon oben (§. 56-63) gewiesen habe, durch Hülfe und Anwendung des statischen Grundgesetzes vom Hebel gefunden werden könne.

1. Vom Schwerpuncte eines Zirkelbogens.

§. 150.

Wenn zuvörderst der Schwerpunct eines Zirkelbogens ABCDE (fig. 64) bestimmt werden soll: so gedenke man sich denselben erst in eine beliebige gerade Anzahl gleicher Bögen, z. E. in AB, BC, CD und DE zerlegt. Zu diesen Bögen ziehe man die Sehnen aus, und theile dieselben alle in 2 gleiche

Theile:

Theile: so sind die Theilungspuncte M, N, P und K die Schwerpuncte dieser Sehne. Man ziehe hierauf die Linien MN und PK, und theile dieselben in Q und I in 2 gleiche Theile: so ist Q der Schwerpunct der beyden Sehnen AB und BC, und eben so ist I der Schwerpunct der Sehnen CD und DE. Man ziehe endlich die Linie QI, und theile dieselbe in G in 2 gleiche Theile: so ist G der Schwerpunct aller 4 Sehnen, AB, BC, CD und DE.

Um jezt aber die Entfernung dieses Schwerpunctes G vom Mittelpuncte des Zirkels F zu bestimmen, ziehe man die Linie FK, welche auf DE perpendiculair steht; wie auch den Radius EF und die Sehnen CE und AE. Alsdenn ist zuerst in den beyden Triangeln KIF und DHE

der W. $o = u = 90°$,

und $r = s$; (§. 61 der Geom.);

folglich auch $x = y$;

---

und es ist also $\Delta\, KIF \sim \Delta\, DHE$;

und es verhält sich also:

$$ED : EH = FK : FI,$$

---

und $2\,ED : 2\,EH = FK : FI$.

Es ist aber $2\,ED = CD + DE$,

und $2\,EH = EC$;

---

folglich $CD + DE : EC = FK : FI$.

Ferner ist in den beyden Triangeln ECR und FIG,

der Winkel $m = p = 90°$,

und $z = i$, (§. 61 der Geom.);

folglich $n = q$,

und $\Delta\ ECR \sim FIG$;

und also $EC : ER = FI : FG$.

Es verhielte sich aber

$CD + DE : EC = FK : FI$;

---

folglich $CD + DE : ER = FK : FG$,

und $2 (CD + DE) : 2\ ER = FK : FG$.

Es ist aber

$2 (CD + DE) = AB + BC + CD + DE$,

und $2\ ER = AE$;

---

folglich

$AB + BC + CD + DE : AE = FK : FG$.

Und also verhält sich überhaupt: die Summa oder die Länge aller gleich grossen Sehne eines Zirkelbogens, zur Sehne des ganzen Zirkelbogens, wie die Perpendiculairlinie aus dem Mittelpuncte des Zirkels auf eine von diesen gleich grossen Sehnen, zur Entfernung des Schwerpunctes aller Sehnen vom Mittelpuncte des Zirkels.

Gedenkt man sich nun aber den Bogen in unendlich viele gleiche Bögen eingetheilt: so ist die Länge aller dazu gehörigen Sehnen der Länge des

Bogens

Bogens gleich; und die Perpendiculairlinie aus dem Mittelpuncte des Zirkels auf eine dieser Sehnen ist der Radius des Zirkels, und folglich verhält sich für den Schwerpunct eines Zirkelbogens:

Die Länge des Zirkelbogens, zur Sehne desselben; wie der Radius des Zirkels, zur Entfernung des Schwerpunctes des Bogens vom Mittelpuncte des Zirkels.

W. Z. E. W.

2. Vom Schwerpuncte eines halben Zirkels.

§. 151.

Wenn hierauf der Zirkelbogen (§. 149) genau die halbe Peripherie eines Zirkels, oder kurz ein halber Zirkel ist: so ist die Sehne desselben ein Diameter des Zirkels; und es verhält sich also für den Schwerpunct eines halben Zirkels:

Die halbe Peripherie, zum Diameter des Zirkels; wie der Radius, zur Entfernung des Schwerpunctes des halben Zirkels vom Mittelpuncte desselben.

Es sey z. E. (fig. 65) der Diameter des Zirkels AB $=$ m : so ist die halbe Peripherie ADB $=$ $\frac{mp}{2d}$ (§. 252 der Geom.); und wenn alsdenn die Ent-

fernung

fernung des Schwerpunctes vom Mittelpuncte des Zirkels CE = x ist: so verhält sich

$$\frac{mp}{2d} : m = \frac{m}{2} : x.$$

Es ist also $x = \frac{dm}{p}$; und man findet demnach die Entfernung des Schwerpunctes eines halben Zirkels vom Mittelpuncte desselben, wenn man den Diameter mit 100 .... multiplicirt, und durch 314 .... dividirt.

3. Vom Schwerpuncte eines geradestehenden Trapeziums, worin 2 Seiten parallel gehen, (§. 152-153.)

§. 152.

Wenn der Schwerpunct eines Trapeziums ABCD (fig. 66), worin 2 Seiten AB und CD parallel gehen, und die Winkel x und y, oder die beyden Seiten AD und BC einander gleich sind, bestimmt werden soll: so theile man erst die beyden parallelen Seiten AB und CD, welche man die Grundlinien des Trapeziums nennen kann, in E und F in 2 gleiche Theile; ziehe hierauf die Linie EF, und alsdenn muß in dieser Linie EF, welche die Höhe des Trapeziums ist, der Schwerpunct des Trapeziums fallen. Wenn man hierauf das Trapezium

durch

durch die Linien AF und BF in 3 Triangel ADF, BFC und AFB zerlegt: so sind die Schwerpuncte der beyden Triangel ADF und BFC auf $\frac{1}{3}$ der Linien AK und BL in M und N; und ihr gemeinschaftlicher Schwerpunct ist ferner auf $\frac{1}{3}$ der Höhe von der grössern Grundlinie CD in G. Der Schwerpunct des Δ ABF aber ist auf $\frac{1}{3}$ der Höhe von der kleinern Grundlinie in H. Hierauf kann man GH als einen mathematischen Hebel ansehen, woran in G die Schwere der beyden Triangel ADF und BFC = P; in H aber die Schwere des Δ AFB = Q hängt, derer Ruhe- oder Bewegungspunct I, als der Schwerpunct des Trapeziums ABCD gefunden werden soll.

Es sey jetzt die Höhe EF = a;

so ist $GH = \frac{a}{3}$;

und wenn alsdenn GI = x ist:

so ist $HI = GH - GI = \frac{a}{3} - x = \frac{a - 3x}{3}$

Es sey ferner CD = m, und AB = n:

so ist $\Delta\ ADF + BFC = \frac{am}{2} = P$,

und $\Delta\ ABF = \frac{an}{2} = Q$.

Nach

Nach dem Gesetze des Hebels ist nun zum Gleichgewichte $P \times GI = Q \times HI$,

das ist $\frac{am}{2} \times x = \frac{an}{2} \times \frac{a - 3x}{3}$,

$= \frac{amx}{2} = \frac{a^2n - 3anx}{6}$,

$= 3amx = a^2n - 3anx$:

folglich $3mx = an - 3nx$,

und $3mx + 3nx = an$;

und also $x = \frac{an}{3m + 3n} = GI$,

Es ist aber $FI = GI + FI$;

folglich $FI = \frac{an}{3m + 3n} + \frac{a}{3}$,

$= \frac{an}{3m + 3n} + \frac{am + an}{3m + 3n}$,

$= \frac{am + 2an}{3m + 3n}$,

$= \frac{a(m + 2n)}{3(m + n)}$.

Man findet also bey einem Trapezium, worin 2 Seiten parallel gehen, die Entfernung des Schwerpunctes von der grössern Grundlinie, wenn man die doppelte Länge der kleinern Grundlinie zur grössern Grundlinie addirt; diese Summa mit der Höhe des Trapeziums multiplicirt, und das Product durch die 3fache Länge der beyden Grundlinien dividirt.

§. 153.

§. 153.

Der Schwerpunct eines Trapeziums ABCD, (fig. 67), von eben der Beschaffenheit wie vorher (§. 152), läßt sich übrigens auch noch durch eine Construction in der Figur unmittelbar angeben und bestimmen.

Man theile abermal nur erst die beyden parallelen Seiten AB und CD in E und F in 2 gleiche Theile: so ist die Linie EF eine Schwerpunctslinie. Hierauf theile man das Trapezium durch eine Diagonallinie BD in die beyden △ ABD und BCD, und ziehe die Linien DE und BF: alsdenn ist auf $\frac{1}{3}$ der Linie DE in G der Schwerpunct des △ ABD; und eben so ist der Schwerpunct des △ BCD auf $\frac{1}{3}$ der Linie BF in H (§. 61). Zieht man endlich die Linie GH: so ist auch in dieser Linie der Schwerpunct des ganzen Trapeziums; und also muß derselbe in I seyn, wo die beyden Schwerpunctslinien EF und GH sich durchschneiden.

4. Vom Schwerpuncte eines ganz irregulairen Trapeziums.

§. 154.

Auf ähnliche Art wird auch der Schwerpunct eines jeden andern ganz irregulairen Trapeziums

ABCD

ABCD (fig. 68) durch Construction in der Figur gefunden und bestimmt.

Man theile auch hier nur 2 einander gegenüberstehenden AB und CD in E und F in 2 gleiche Theile. Alsdenn theile man das Trapezium erst durch die Diagonallinien BD in die beyden Triangel ABD und BCD, und ziehe die Linien DE und BF; alsdenn ist der Schwerpunct des △ ABD auf $\frac{1}{3}$ der Linie DE in G, und der Schwerpunct des △ BCD ist auf $\frac{1}{3}$ der Linie BF in H, und eine gerade Linie GH ist also eine Schwerpunctslinie des Trapeziums. Hierauf theile man das Trapezium durch die Diagonallinie AC in die beyden △ ABC und ACD, und ziehe die Linien CE und AF; alsdenn ist der Schwerpunct des △ ABC auf $\frac{1}{3}$ der Linie CE in I, und der Schwerpunct des △ ACD ist auf $\frac{1}{3}$ der Linie AF in K, und eine gerade Linie IK ist also auch eine Schwerpunctslinie des Trapeziums; und es muß demnach der Schwerpunct des Trapeziums in M seyn, wo die beyden Schwerpunctslinien GH und IK sich durchschneiden.

5. Vom Schwerpuncte eines jeden sowohl irregulairen als regulairen Vieleckes.

§. 155.

Ein jedes irregulaire Vieleck läßt sich durch Diagonallinien in Triangel zerlegen, und von diesen Triangeln machen immer 2 und 2 ein Trapezium aus: es läßt sich daher auch leicht der Schwerpunct eines jeden Vielecks durch Construction in der Figur finden.

Der Schwerpunct eines regulairen Vieleckes aber sieht man leicht, muß im Mittelpuncte des Zirkels seyn, der um das Vieleck beschrieben werden kann; und eben so ist auch der Schwerpunct einer Zirkelfläche selbst im Mittelpuncte desselben.

6. Vom Schwerpuncte eines Zirkel-Ausschnittes.

§. 156.

Der Schwerpunct eines Zirkel-Ausschnittes ABC (fig. 69) zu finden, erwäge man nur, daß der Ausschnitt aus unendlich vielen Triangeln bestehe, deren Grundlinien zusammen der Länge des Bogens AB gleich sind, und deren Höhe der Radius AC ist.

Die

Die Schwerpuncte aller dieser Dreyecke, oder des ganzen Ausschnittes, liegen demnach insgesamt in einem Bogen DE, welcher mit $\frac{2}{3}$ des Radius AC aus dem Mittelpuncte C gezogen wird (§. 61); und der Schwerpunct dieses Bogens muß also auch der Schwerpunct des Ausschnittes seyn. Wie der Schwerpunct eines Zirkelbogens gefunden werde, ist schon (§. 150) gewiesen worden. Da aber der Bogen DE genau $\frac{2}{3}$ des Bogens AB, und die Sehne DE ebenfalls $\frac{2}{3}$ der Sehne AB, und der Radius CD endlich auch $\frac{2}{3}$ des Radius AC ist: so verhält sich für den Schwerpunct eines Zirkel-Ausschnittes:

$\frac{2}{3}$ der Länge des Zirkelbogens AB, zu $\frac{2}{3}$ der Sehne desselben; wie $\frac{2}{3}$ des Radius AC zur Entfernung des Schwerpunctes des Ausschnittes I vom Mittelpuncte des Zirkels oder von der Spitze des Ausschnittes C.

7. Vom Schwerpuncte einer halben Zirkelfläche.

§. 157.

Wenn der Ausschnitt eines Zirkels eine halbe Zirkelfläche ADB (fig. 70) ist: so ist wiederum die Sehne des halben Zirkels AB ein Diameter des Zir-

kels;

kels; und für den Schwerpunct I einer halben Zirkelfläche ABD verhält sich demnach:

$\frac{2}{3}$ der halben Peripherie ADB, zu $\frac{2}{3}$ des Diameters des Zirkels AB; wie $\frac{2}{3}$ des Radius AC, zur Entfernung des Schwerpunctes der halben Zirkelfläche CI vom Mittelpuncte des Zirkels C.

Es sey z. E. abermal der Diameter des Zirkels AB = m: so ist $\frac{2}{3}$ der halben Peripherie ADB = $\frac{2}{3} \times \frac{mp}{2d} = \frac{mp}{3d}$; und wenn denn die Entfernung des Schwerpunctes vom Mittelpuncte CI = x ist: so verhält sich:

$$\frac{mp}{3d} : \frac{2m}{3} = \frac{m}{3} : x.$$

Es ist also $x = \frac{2dm}{3p}$;

oder es verhält sich $3p : 2d = m : x$.

Man findet also die Entfernung des Schwerpunctes der halben Zirkelfläche vom Mittelpuncte des Zirkels, wenn man den Diameter mit 200 .... multiplicirt, und das Product durch 3 × 314 .... = 942 dividirt.

8. Vom Schwerpuncte eines vielseitigen Prismas und eines Cylinders.

§. 158.

Der Schwerpunct eines Prismas von mehr als 4 Seiten liegt in der Mitte der geraden Linie,

welche

welche zwischen den Schwerpuncten der beyden con-
gruenten Grundflächen gezogen werden kann; und also bey geraden Prismen in der Mitte der Höhe. Wie aber der Schwerpunct der Grundflächen je nachdem es regulaire oder irregulaire Figuren sind, gefunden und bestimmt werde, ist kurz vorher (§. 155) gewiesen worden.

Der Schwerpunct eines Cylinders liegt demnach endlich ebenfalls in der Mitte der geraden Linien zwischen den Mittelpuncten seiner beyden Grundflächen; und also bey einem geraden Cylinder in der Mitte seiner Axe, wie auch schon oben (§. 56) auf eine andere Art gezeigt worden ist.

9. Vom Schwerpuncte der 4 und vieleckigten Pyramiden und eines Kegels.

§. 159.

Die Entfernung des Schwerpunctes einer 3eckigten Pyramide von der Grundfläche derselben ist immer $\frac{1}{4}$ der Schwerpunctslinie, welche aus der Spitze der Pyramide nach dem Schwerpuncte der Grundfläche hingezogen werden kann; und liegt also bey geradestehenden 3eckigten Pyramiden auf $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche, wie schon oben (§. 63) gezeigt worden ist. Da nun aber die Grundfläche

einer jeden 4 und vieleckigten Pyramide durch Diagonallinien in lauter Triangel zerlegt werden kann; und folglich eine jede 4 und vieleckigte Pyramide gleichsam aus 3eckigten Pyramiden zusammengesetzt ist, oder würklich besteht: so muß auch der Schwerpunct einer jeden Pyramide von der Grundfläche ab auf $\frac{1}{4}$ der geraden Linie liegen, welche aus der Spitze nach dem Schwerpuncte der Grundfläche hingezogen wird, und durch alle Schwerpuncte der Elemente der ganzen Pyramide geht.

Bey einer geraden Pyramide, deren Grundfläche eine regulaire Figur ist, liegt demnach der Schwerpunct auf $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche.

Endlich ist bey einem Kegel ebenfalls die Entfernung des Schwerpunctes von der Grundfläche $\frac{1}{4}$ der geraden Linie, welche aus der Spitze des Kegels nach dem Mittelpuncte der Grundfläche hingezogen wird; und liegt folglich bey geraden Kegeln auf $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche.

10. Vom Schwerpuncte eines abgekürzten Kegels.

§. 160.

Bey einem geradestehenden abgekürzten Kegel ABCD (fig. 71) liegt natürlicherweise der Schwerpunct

punct desselben K in der Axe EF. Wenn man nun aber die Entfernung des Schwerpunctes etwa von der grössern Grundfläche, nach der jedesmaligen Länge sowohl der beyden Diameter AB und CD, als der Höhe angeben und bestimmen soll: so gedenke man sich nur erst den ganzen Kegel ABG; alsdenn ist der Schwerpunct desselben auf $\frac{1}{4}$ der Höhe FG in H, und ebenso ist der Schwerpunct des kleinen Kegels GCD auf $\frac{1}{4}$ seiner Höhe in I. Der Schwerpunct des abgekürzten Kegels muß ferner nicht nur näher an der grössern, als an der kleinern Grundfläche des abgekürzten Kegels, als auch nothwendig unterhalb dem Schwerpuncte des ganzen Kegels ABG liegen. Gesetzt nun der Schwerpunct des abgekürzten Kegels wäre etwa in K: so kann man sich die Entfernung dieses Punctes von dem Schwerpuncte des kleinen Kegels KI als einen mathematischen Hebel vorstellen, an dessen einem Ende in K die Schwere des abgekürzten Kegels ABCD, und an dessen anderm Ende in I die Schwere des kleinern Kegels CDG hängt, deren gemeinschaftlicher Schwerpunct, als der Bewegungspunct des Hebels aber im Schwerpuncte H des ganzen Kegels ABG ist.

Nach diesen Bestimmungen sey jetzt z. E.

der grössere Diam. $AB = m$,

der kleinere Diam. $CD = n$,

und die Höhe des abgek. Kegels $EF = a$:

so ist die Höhe des ganzen Kegels $ABG = \frac{am}{m - n}$,

und die Höhe des kleinen Kegels $CDG = \frac{an}{m - n}$;

und folglich $FH = \frac{am}{4m - 4n}$,

und $EI = \frac{an}{4m - 4n}$.

Ferner ist der Inhalt des abgekürzten Kegels

$$ABCD = \frac{(m^3 - n^3)\,ap}{12\,dm - 12\,dn} = Q,$$

und der Inhalt des Kegels $CDG = \frac{an^3p}{12\,dm - 12\,dn} = P$.

(§. 335 der Geom.).

Es ist aber $FI = EI + EF$,

folglich ist $FI = \frac{an}{4m - 4n} + a$,

$$= \frac{an}{4m - 4n} + \frac{4am - 4an}{4m - 4n},$$

$$= \frac{4am - 3an}{4m - 4n}.$$

Ferner ist $HI = FI - FH$,

folglich ist $HI = \frac{4am - 3an}{4m - 4a} - \frac{am}{4m - 4n}$,

$$= \frac{3am - 3an}{4m - 4n},$$

$$= \tfrac{3}{4}a.$$

Die

Die Entfernung der beyden Schwerpuncte des ganzen Kegels ABG, und des kleinen Kegels CDG von einander ist also immer $\frac{3}{4}$ der Höhe des abgekürzten Kegels ABCD.

Wenn nun endlich HK = x ist: so muß bey dem waagförmigen Hebel IK zum Gleichgewichte sich verhalten:

$$Q : P = HI : HK,$$

das ist $\frac{(m^3 - n^3)\, ap}{12\, dm - 12\, dn} : \frac{an^3 p}{12\, dm - 12\, dn} = \frac{3}{4} a : x,$

und also $m^3 - n^3 : n^3 = \frac{3}{4} a : x,$

---

und folglich ist x oder $HK = \frac{3\, an^3}{4\,(m^3 - n^3)}$.

Nun aber ist nach der Figur

$$FK = HF - HK,$$

folglich $FK = \frac{am}{4\,(m - n)} - \frac{3\, an^3}{4\,(m^3 - n^3)},$

$$= \frac{am^3 + am^2 n + amn^2}{4\,(m^3 - n^3)} - \frac{3\, an^3}{4\,(m^3 - n^3)}$$

(§. 49 der Ar.)

$$= \frac{am^3 + am^2 n + amn^2 - 3an^3}{4\,(m^3 - n^3)},$$

$$= \frac{a.(m^2 + 2\, mn + 3n^2)}{4\,(m^2 + mn + n^2)}.$$

Nach welchem Ausdrucke alsdenn in einem jeden Falle die Entfernung des Schwerpunctes eines

geraden

geraden abgekürzten Kegels von der grössern Grundfläche desselben leicht berechnet werden kann [*]).

11. Vom Schwerpuncte einer halben Kugel.

§. 161.

Der Schwerpunct einer Kugel ist im Mittelpuncte derselben. Wenn aber der Schwerpunct einer halben Kugel ABC (fig. 72) bestimmt werden soll: so ist klar, und ohne weitere Untersuchung ausgemacht, daß derselbe irgendswo in der Linie BD, näher an D als an B, etwa in I seyn müsse. Die Entfernung dieses Punctes I von dem Mittelpuncte D der

[*]) Auf eben die Art hätte man auch bey einem geradstehenden Trapezium, worin 2 Seiten parallel gehen (§. 152, fig. 66), den Ausdruck für die Entfernung des Schwerpunctes von der grössern Grundlinie, durch Ergänzung des Trapeziums zu einem gleichschenklichten Triangel finden und bestimmen können. Alsdenn würde die Entfernung des Schwerpunctes des Trapeziums von dem Schwerpuncte des abgeschnittenen Dreyeckes der mathematische Hebel seyn, dessen Ruhe- oder Bewegungspunct im Schwerpuncte des ganzen gleichschenklichten Triangels sich befände, und an dessen einem Arme die Schwere des Trapeziums, an dem andern Arme aber die Schwere des abgeschnittenen Dreyeckes angebracht wäre.

der Grundfläche der halben Kugel aber in Theilen des Radius der halben Kugel genau anzugeben, vergleiche man nur die halbe Kugel ABC mit dem Cylinder AEFC und dem Kegel DEF, welche beyden Körper mit der halben Kugel gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben. Von diesen 3 Körpern lehrt der Archimedeische Lehrsatz in der Geometrie (§. 537 der Geometrie), daß die halbe Kugel ABC, und der Kegel DEF zusammengenommen dem Cylinder AEFC in der Grösse, und folglich auch am Gewichte gleich sind; und daß ferner die halbe Kugel ABC genau doppelt so groß, und folglich auch doppelt so schwer sey, als der Kegel DEF.

Da nun der Schwerpunct des Cylinders AEFC auf der Hälfte der Höhe BD in G (§. 156), und der Schwerpunct des Kegels DEF auf $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche in H (§. 159) ist: so kann man dadurch erst finden, wie weit der Schwerpunct I der halben Kugel ABC unterhalb dem Schwerpuncte G des Cylinders AEFC liege.

Man kann wiederum hier die Entfernung des Schwerpunctes I der halben Kugel ABC von dem Schwerpuncte H des Kegels DEF, das ist nach der Figur IH, als einen mathematischen waagförmigen Hebel ansehen, an dessen einem Ende in I die

Schwere

Schwere der halben Kugel ABC = Q, und an dem andern Ende in H die Schwere des Kegels DEF = P hängt; deren gemeinschaftlicher Schwerpunct, als der Ruhepunct des Hebels, aber im Schwerpuncte des Cylinders AEFC in G ist.

Wenn nun die Schwere des Kegels P = 1 ist: so ist die Schwere der halben Kugel Q = 2; und wenn ferner der Radius der halben Kugel BD = a ist: so ist GH = BH = $\frac{a}{4}$; und wenn alsdenn endlich GI = x gesetzt wird: so verhält sich

$$Q : P = GH : GI,$$

$$\text{das ist } 2 : 1 = \frac{a}{4} : x;$$

---

und also ist x oder GI = $\frac{a}{8}$.

Nun aber ist DI = DG — GI,

folglich ist DI = $\frac{a}{2} - \frac{a}{8} = \frac{3}{8}$ a.

W. Z. E. W.

12. Vom Schwerpuncte eines Kugel-Abschnittes.

§. 162.

Wenn der Schwerpunct eines Kugel-Abschnittes ABC (fig. 73) nach der jedesmaligen Beschaffenheit der Höhe desselben BD, und des Diameters

der

der Grundfläche AC gefunden und bestimmt werden soll: so muß auch dieses nach dem Archimedeischen Lehrsatze in der Geometrie durch Vergleichung des Kugel-Abschnittes ABC mit dem abgekurzten Kegel FGLK und dem Cylinder FGRS geschehen. Auch hier ist der Abschnitt ABC mit dem abgekürzten Kegel FGLK zusammen genommen, dem Cylinder FGRS gleich, (§. 347 der Geom.)

Diese 3 Körper haben nun auch jeder ihren besondern Schwerpunct; nemlich der Schwerpunct des Cylinders FGRS ist in der Mitte der Höhe des Abschnittes BD in N, und der Schwerpunct des abgekürzten Kegels FGLK in O kann ebenfalls nach dem Ausdrucke, der für die Entfernung des Schwerpunctes eines abgekürzten Kegels von der grössern Grundfläche desselben (§. 160) ausgemacht ist, gefunden werden; und wenn alsdenn der Schwerpunct des Abschnittes ABC etwa in M ist: so läßt sich wieder die Entfernung desselben von dem Mittelpuncte der Grundfläche D folgendermaassen finden.

Man sieht leicht, daß auch hier wieder die Entfernung des Schwerpunctes M des Abschnittes ABC von dem Schwerpuncte O des abgekürzten Kegels FGLK, das ist die Weite MO ein mathematischer waagförmiger Hebel sey, an dessen einem

Ende in O die Schwere des abgekürzten Kegels FGLK $=$ Q, und an dessen anderm Ende in M die Schwere des Abschnittes ABC $=$ P hange: deren gemeinschaftlicher Schwerpunct, als der Bewegungspunct des Hebels aber im Schwerpuncte des Cylinders FGRS in N sey. Zum Gleichgewichte muß sich also verhalten:

$$P : Q = NO : MN.$$

Wenn nun die Höhe des Abschnittes BD $= a$, und der Diameter der Grundfläche desselben $= n$ ist: so ist der Inhalt, und folglich auch die Schwere des Abschnittes ABC, oder

$$p = \frac{3a^2n^2p + 4a^4p}{24\,ad};$$

und der Inhalt oder die Schwere des abgekürzten Kegels FGLK, oder

$$Q = \frac{3n^4p + 16a^4p}{192\,ad}$$ (§. 348 der Geom.);

und es muß sich also hier zum Gleichgewichte verhalten

$$\frac{3a^2n^2p + 4a^4p}{24\,ad} : \frac{3n^4p + 16a^4p}{192\,ad} = NO : MN,$$

und also $24a^2n^2 + 32a^4 : 3n^4 + 16a^4$
$= NO : MN.$

Die Entfernung NO aber jetzt noch ferner zu bestimmen, muß erst ein algemeiner Ausdruck für die Entfernung des Schwerpunctes O des abgekürzten Kegels FGLK von der grössern Grundfläche desselben,

ben, das ist in diesem Falle für OB ausgemacht werden.

Wenn der grössere Diameter eines abgekürzten Kegels FG $=$ m, der kleinere Diam. KL $=$ n, und die Höhe desselben BD $=$ a ist: so ist vorher (§. 160) gewiesen worden, daß die Entfernung des Schwerpunctes von der grössern Grundfläche sey

$$= \frac{a(m^2 + 2mn + 3n^2)}{4(m^2 + mn + n^2)}.$$

Wenn aber die Höhe des Abschnittes BD $=$ a, und der Diameter der Grundfläche AC $=$ n ist: so ist der Diameter der grössern Grundfläche FG des abgekürzten Kegels FGLK, oder das m dieser Formel für die Entfernung des Schwerpunctes von der grössern Grundfläche $= \frac{n^2 + 4a^2}{4a}$;

und der Diameter der kleinern Grundfläche desselben, oder das n der Formel

$$= \frac{n^2 - 4a^2}{4a}, \text{ (§. 348 der Geom.).}$$

Und also ist hier

$$(FG)^2 \; (m^2) = \frac{a^4 + 8a^2n^2 + 16a^4}{16a^2},$$

$$2FG \times KL \; (2mn) = \frac{2n^4 - 32a^4}{16a^2},$$

und $3(KL)^2 \; (3n^2) = \frac{3n^4 - 24a^2n^2 + 48a^4}{16a^2}$;

folglich ist $(FG)^2 + 2FG \times KL + 3(KL)^2$,

oder

oder das $m^2 + 2mn + 3n^2$ der Formel

$$= \frac{6n^4 - 16a^2n^2 + 32a^4}{16a^2},$$

$$= \frac{3n^4 - 8a^2n^2 + 16a^4}{8a^2}.$$

Und also ist $a(m^2 + 2mn + 3n^2)$

$$= \frac{3n^4 - 8a^2n^2 + 16a^4}{8a}.$$

Ferner ist ebenfalls

$$(FG)^2 + FG \times KL + (KL)^2,$$

oder das $m^2 + mn + n^2$ der Formel

$$= \frac{3n^4 + 16a^4}{16a}, \text{ (§. 348 der Geom.)},$$

und also $4(m^2 + mn + n^2) = \frac{3n^4 + 16a^4}{4a^2}$.

Und demnach ist hier die Entfernung des Schwerpunctes O von der grössern Grundfläche, oder

$$OB = \frac{3n^4 - 8a^2n^2 + 16a^4}{8a} : \frac{3n^4 + 16a^4}{4a^2},$$

$$= \frac{3n^4 - 8a^2n^2 + 16a^4}{8a} \times \frac{4a^2}{3n^4 + 16a^4},$$

$$= \frac{3an^4 - 8a^3n^2 + 16a^5}{6n^4 + 32a^4}.$$

Es ist aber

$$NO = BN - OB,$$

folglich $NO = \frac{a}{2} - \frac{3an^4 - 8a^3n^2 + 16a^5}{6n^4 + 32a^4},$

$$= \frac{3an^4 + 16a^5}{6n^4 + 32a^4} - \frac{3an^4 - 8a^3n^2 + 16a^5}{6n^4 + 32a^5},$$

$$= \frac{8a^3n^2}{6n^4 + 32a^4},$$

$$= \frac{4a^3n^2}{3n^4 + 16a^4}.$$

Zum

Zum Gleichgewichte beym Hebel MO verhält sich also:

$$24a^2n^2 + 32a^4 : 3n^4 + 16a^4 = \frac{4a^3n^2}{3n^4 + 16a^4} : MN;$$

Und es ist also

$$MN = \frac{4a^3n^2}{24a^2n^2 + 32a^4} = \frac{an^2}{6n^2 + 8a^2}.$$

Endlich ist nun noch

$$DM = DN - MN;$$

$$\text{also } DM = \frac{a}{2} - \frac{an^2}{6n^2 + 8a^2},$$

$$= \frac{2an^2 + 4a^3}{6n^2 + 8a^2},$$

$$= \frac{an^2 + 2a^3}{3n^2 + 4a^2}. \quad \text{W. Z. E. W.}$$

13. Vom Schwerpuncte eines mit einem Cylinder ausgehöhlten abgekürzten Kegels.

§. 163.

Bey den bisher abgehandelten Fällen, den Schwerpunct in verschiedenen geometrischen, als schwer angenommenen Körpern zu finden, ist immer vorausgesetzt worden, daß der ganze Raum des Körpers mit der Materie ausgefüllet sey, und kein leerer Raum oder Aushöhlung inwendig in demselben statt finde; denn nur alsdenn kann die Grösse des Körpers

für

für die Schwere desselben angenommen, und der Schwerpunct des ganzen Körpers darnach bestimmt werden. Wenn aber im Gegentheil ein Körper auf eine oder die andere Art ausgehöhlet ist: so wird vielfältig der Schwerpunct desselben sehr verrückt; und ich will daher jetzt noch nur an einem einzigen Beyspiele zeigen, wie alsdenn doch auch der Schwerpunct des hohlen Körpers leicht gefunden werden könne.

Gesetzt der abgekürzte Kegel ABCD (fig. 74) sey in der Mitte nach der Länge ganz durch mit einem Cylinder GHIK ausgehöhlt: so ist, weil der Schwerpunct des unausgehöhlten oder maßiven abgekürzten Kegels L näher an der grössern, als an der kleinern Grundfläche desselben liegt, durch die Aushöhlung dem kleinern Theile DCRO des abgekürzten Kegels, der dem grössern Theile desselben AORB das Gleichgewicht hält, ein grösseres Stück GHTS als dem grössern Theile AORB, von dem dadurch nur das Stück ITSK abgeht, genommen worden. Und folglich wird auch nothwendig der Schwerpunct des hohlen abgekürzten Kegels weiter nach der grössern Grundfläche zu fortrücken müssen, wenn alsdenn noch die beyden Theile desselben einander das Gleichgewicht halten sollen.

Um jetzt aber in einem jeden Falle zu bestimmen, um wie viel der Schwerpunct des hohlen abgekürzten Kegels N der grössern Grundfläche näher liege, als der Schwerpunct des maßiven abgekürzten Kegels L, gedenke man sich nur die Entfernung des Schwerpunctes des hohlen abgekürzten Kegels N, von dem Schwerpuncte des Cylinders M, das ist MN als einen waagförmigen mathematischen Hebel, dessen Punct der Unterlage in dem Schwerpuncte des maßiven abgekürzten Kegels L sey; an dessen einem Arme in M aber die Grösse des Cylinders GHIK, als die Schwere desselben = P, und an dessen anderm Arme in N die Grösse des hohlen abgekürzten Kegels, als dessen Schwere = Q hange. Und alsdenn wird zum Gleichgewichte bey diesem Hebel sich verhalten müssen:

$$Q : P = ML : LN.$$

Da nun sowohl der Inhalt des Cylinders P, als auch der Inhalt des ausgehohlten abgekürzten Kegels Q (indem man in Ansehung dieses Körpers nur den Inhalt des Cylinders GHIK, von dem Inhalte des maßiven abgekürzten Kegels ABCD abzieht) berechnet werden kann; und die Länge des Hebelarms ML ebenfalls bekannt ist, indem man nur die Entfernung des Schwerpunctes des maßiven abgekürzten Kegels von der grössern Grundfläche LF von

der

der halben Höhe des abgekürzten Kegels MF abziehen darf: so kann aus diesen 3 bekannten Stücken nach obiger Proportion die Länge des Hebelarmes LN berechnet, und folglich der Schwerpunct des hohlen abgekürzten Kegels gefunden werden.

W. Z. E. W.

14. Vom Schwerpuncte mehrerer an einer geraden Linie hangenden Gewichter.

§. 164.

Wenn endlich an einer geraden Linie AB (fig. 75), welche man sich ohne alle Schwere, und also als eine mathematische Linie gedenkt, verschiedene Gewichter, z. E. P, Q, R, S und T in gleichen oder ungleichen, aber in bestimmten und bekannten Entfernungen von einander, und von den beyden Enden der Linie hangen: so kann die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes dieser Gewichter von einem bestimmten Puncte in der Linie, z. E. von dem Endpuncte derselben A, nach den bisher abgehandelten Lehren, und insonderheit nach dem allgemeinen Grundgesetze des Hebels (§. 79) folgendermaassen gefunden werden.

Man

Man kann die gerade Linie AB als einen mathematischen waagförmigen Hebel ansehen, an dem in verschiedenen bestimmten Entfernungen von einander und von den Endpuncten der Linie, die Gewichter P, Q, R, S und T, als eben so viele Kräfte angebracht sind, zu denen an dem Hebel der Punct gefunden werden soll, welcher unterstützt werden muß, wenn alle Gewichter unter sich einander das Gleichgewicht halten sollen; und welcher Punct alsdenn der Ruhe- oder Bewegungspunct des Hebels, und also auch der gemeinschaftliche Schwerpunct aller Gewichter ist.

Hierauf gedenke man sich zuvörderst CD, welches die Entfernung der beyden Gewichter P und Q von einander ist, als einen mathematischen waagförmigen Hebel, woran die beyden Gewichter im Gleichgewichte mit einander sich befinden, und suche den Punct der Unterlage dieses Hebels, als den gemeinschaftlichen Schwerpunct der beyden Gewichter P und Q: so wird dadurch zugleich die Entfernung dieses Punctes von dem Endpuncte A der Linie AB bestimmt. Zu dieser Absicht verhält sich:

$$P : Q = DH : CH;$$

oder es ist $P \times CH = Q \times DH$.

Es ist aber $CH = AH - AC$,
und $DH = AD - AH$;

folglich ist

$$P \cdot AH - P \cdot AC = Q \cdot AD - Q \cdot AH,$$

und also

$$P \cdot AH + Q \cdot AH = P \cdot AC + Q \cdot AD,$$

und also ist $AH = \frac{P \cdot AC + Q \cdot AD}{P + Q}$.

Ferner gedenke man sich jetzt HE, als einen solchen Hebel, woran in H die beyden Gewichter P und Q, in E aber das Gewicht R hangen, und einander das Gleichgewicht halten. Der Punct der Unterlage dieses Hebels I ist alsdenn auch der gemeinschaftliche Schwerpunct der 3 Gewichter P, Q und R; und indem man denselben bestimmt, wird dadurch auch die Entfernung desselben von dem Endpuncte A der Linie $AB = AI$ ausgemacht. Es verhält sich also hier:

$$P + Q : R = EI : HI,$$

oder es ist $(P + Q) \cdot HI = R \cdot EI$.

Es ist aber $HI = AI - AH$,
und $EI = AE - AI$;

folglich

$$(P+Q) \cdot AI - (P+Q) \cdot AH = R \cdot AE - R \cdot AI,$$

Also

$$(P+Q) \cdot AI + R \cdot AI = (P+Q) \cdot AH + R \cdot AE.$$

Es ist aber $AH = \frac{P . AC + Q . AD}{P + Q}$;

folglich $(P + Q) . AH = P . AC + Q . AD$,

Also $(P + Q) . AI + R . AI = P . AC + Q . AD + R . AE$;

und also $AI = \frac{P . AC + Q . AD + R . AE}{P + Q + R}$.

Und nun sieht man leicht, nach welchem Gesetze die Bestimmung der Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes verschiedener Gewichter an einer geraden Linie, von dem Endpuncte derselben, weiter fortgehe. So ist z. E. in diesem Falle noch ferner zuerst für die 4 Gewichter P, Q, R und S die Entfernung des Schwerpunctes derselben K von dem Endpuncte A der Linie AB; oder kurz

$$AK = \frac{P . AC + Q . AD + R . AE + S . AF}{P + Q + R + S};$$

und so ist zuletzt für alle 5 Gewichter P, Q, R, S und T die Entfernung des Schwerpunctes derselben M von dem Endpuncte A der Linie AB; oder kurz

$$AM = \frac{P . AC + Q . AD + R . AE + S . AF + T . AG}{P + Q + R + S + T}.$$

Und es wird also überhaupt die Entfernung des gemeinschäftlichen Schwerpunctes verschiedener Gewichter, welche an einer geraden Linie hangen, von dem Endpuncte der Linie gefunden, wenn man ein-jedes einzelne Gewicht mit seiner Entfernung von die-

sem Puncte multiplicirt; alle diese Producte zusammen addirt, und alsdenn zuletzt diese Summa durch die Summa aller Gewichter dividirt.

W. Z. E. W.

Anmerkung. Wenn etwa das 1ste Gewicht P unmittelbar am Ende der Linie angebracht wäre: so würde auch die Entfernung dieses Gewichtes von dem Ende der Linie = o seyn, und folglich auch das Product dieses Gewichtes und seiner Entfernung = o seyn; und es würde alsdenn das Product P . AC aus dem Ausdrucke für die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes aller Gewichter von dem Endpuncte der Linie wegfallen; oder es wäre alsdenn:

$$AM = \frac{Q.AD + R.AE + S.AF + T.AG}{P + Q + R + S + T}.$$

15. Vom Schwerpuncte einer Kanone.

§. 165.

Die bisher abgehandelten Fälle, nicht nur den Schwerpunct eines einzigen sowohl massiven als ausgehöhlten geometrischen Körpers, sondern auch insonderheit den gemeinschaftlichen Schwerpunct mehrerer an einer geraden Linie hangenden Körper (§. 164) zu finden, führen jetzt unmittelbar dahin,

den

den Schwerpunct einer Kanone nach einer genauen Zeichnung von derselben zu bestimmen.

Der Schwerpunct einer Kanone (fig. 76) liegt natürlicherweise in der Axe derselben AB. Nun gedenke man sich zuvörderst die Kanone ganz massiv oder noch unausgebohrt, und theile sie in ihre 5 gewöhnlichen Haupttheile ein. Diese Haupttheile sind: der Boden abcd, das Hinterstück oder das Bodenfeld efgh, das Mittelstück oder das Zapfenfeld iklm, das Vorderstück oder das Langefeld nopq, und endlich der Kopf orsp.

Von einem jeden dieser Haupttheile wird nun zuerst nach den Maassen, welche die Gestalt und Grösse desselben bestimmen, der körperliche Inhalt geometrisch ausgerechnet, und alsdenn nimmt man den Inhalt eines jeden für die Schwere desselben an.

Hierauf wird ferner auch der Schwerpunct eines jeden besondern Theiles der Kanone bestimmt, und dadurch gefunden, wie weit der Schwerpunct eines jeden Theiles von dem Endpuncte der Kanone A entfernet sey.

Alsdenn ist die ganze Länge der Kanone AB der mathematische waagförmige Hebel, woran in den Schwerpuncten der verschiedenen Theile C, D, E, F und G die Gewichter derselben P, Q, R, S

und

und T hangen, deren gemeinschaftlicher Schwerpunct, als der Schwerpunct der ganzen massiven oder noch unausgebohrten Kanone jetzt unmittelbar nach der Formel für die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes verschiedener an einer geraden Linie hangenden Körper, von dem Endpuncte der Linie (§. 164) gefunden und bestimmt werden kann.

Wenn man hierauf die Kanone ordentlich ausgebohrt annimmt, und die Seele derselben, wie gewöhnlich, ein mit einer halben Kugel abgerundeter Cylinder ist: so wird dadurch der Schwerpunct der Kanone weiter nach hinten zu fortgerückt, und diese Weite, um wie viel derselbe weiter nach hinten zu, zu liegen kommt, wird alsdenn auf eben die Art, wie bey dem hohlen abgekürzten Kegel (§. 163) bestimmt und ausgemacht.

§. 166.

Ich habe hier bey Bestimmung des Schwerpunctes einer Kanone blos die 5 Hauptabtheilungen derselben in Erwägung gezogen, und die Traube und den Stoß, mit samt den übrigen Verzierungen und Bändern oder so genannten Friesen gänzlich ausser Acht gelassen. Sollte indessen eine grössere Genauigkeit verlangt werden: so ist leicht einzusehen,

daß

daß dadurch die Art, den Schwerpunct zu bestimmen, nicht verändert werde. Es würden blos mehrere Abtheilungen der Kanone angenommen werden müssen, und folglich würde nur die Rechnung im Ganzen dadurch so viel weitläuftiger werden.

Druckfehler.

Seite	Linie	
3.	21.	anstatt, der lies: die
17.	23.	an den lies: an dem
19.	20.	andere lies: andern
20.	5.	heiß lies: heißt
26.	13.	16ten lies: 16te
31.	24.	alls lies: als
42.	3.	hvhlen lies: hohlen
53.	6.	geometrischen Körpern lies: geometrischen Linien, ebenen Figuren und Körpern
55.	15.	neuere lies: neuern
57.	23.	in lies: je
67.	14.	u und y lies: v und y
75.	21.	im lies: in
93.	22.	eingreifendes lies: eingreifenden
94.	22.	demnoch lies: demnach
119.	22.	Räde lies: Räder
136.	23.	dennoch lies: demnach
146.	3.	Eisen lies: Eise
155.	9.	GI + FI lies: GI + FG
157.	4.	überstehenden lies: überstehende Seiten
163.	5.	Höhe lies: Höhe EF

Tab. I.

Fig. 2.

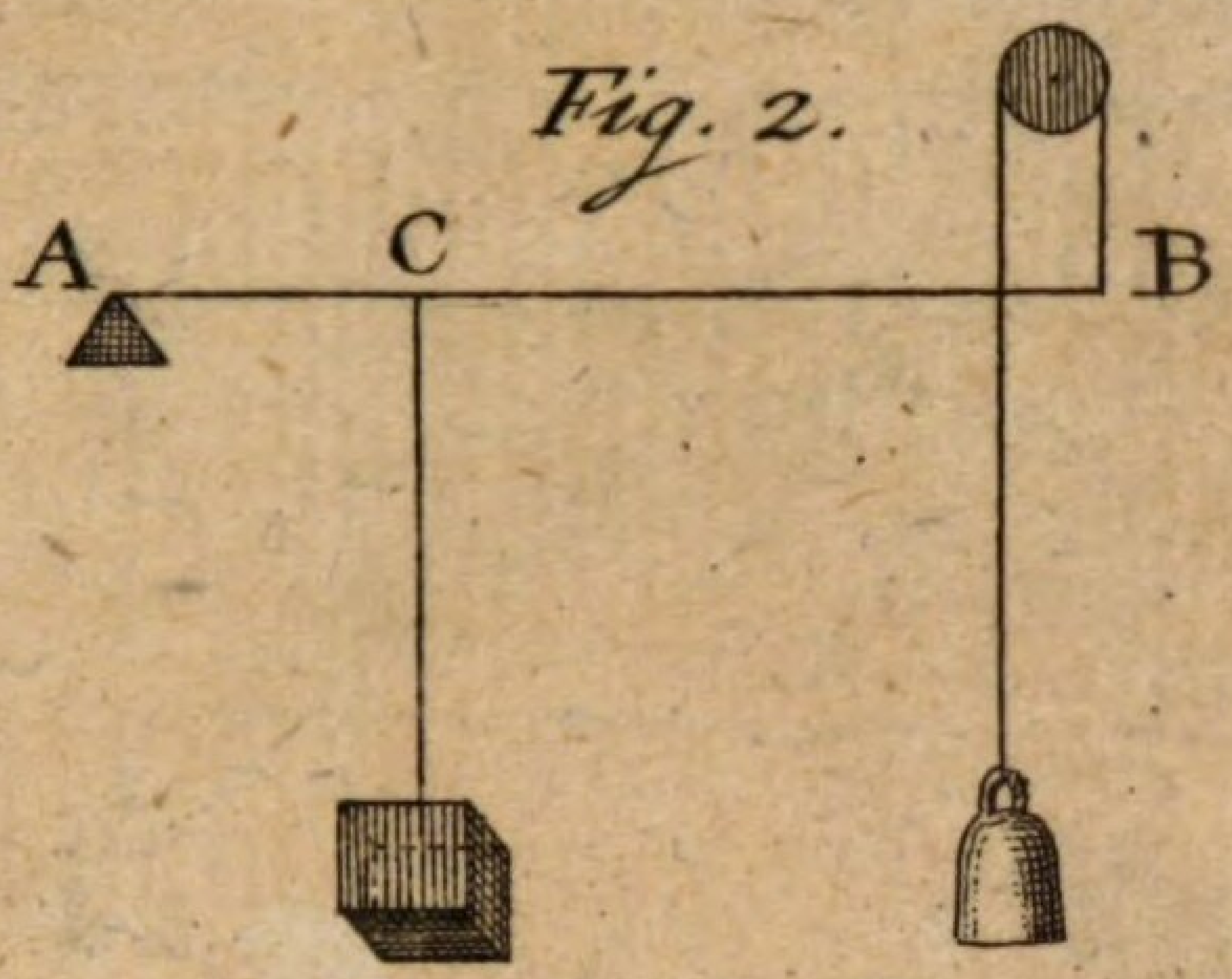


Fig. 4.

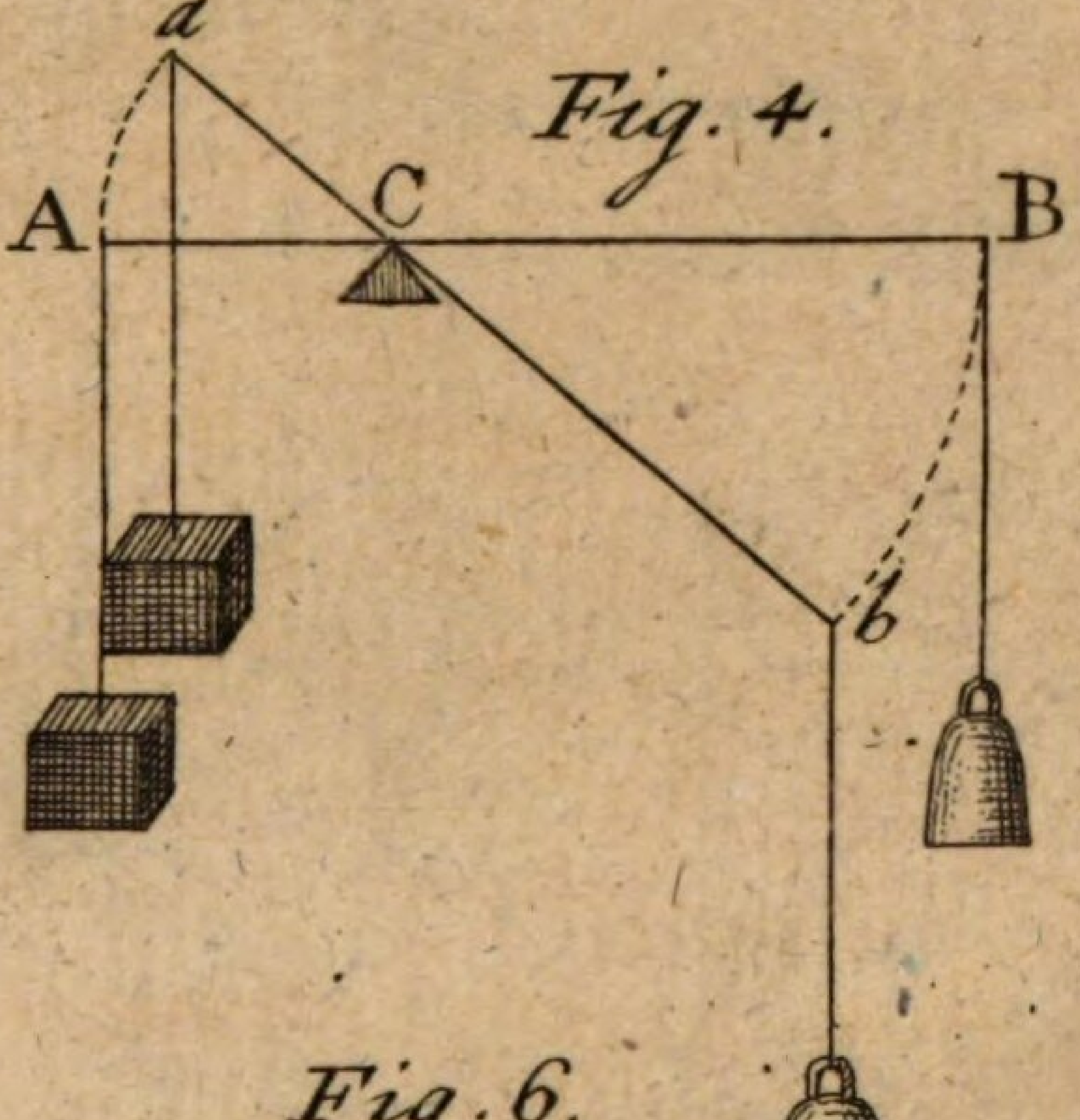


Fig. 6.

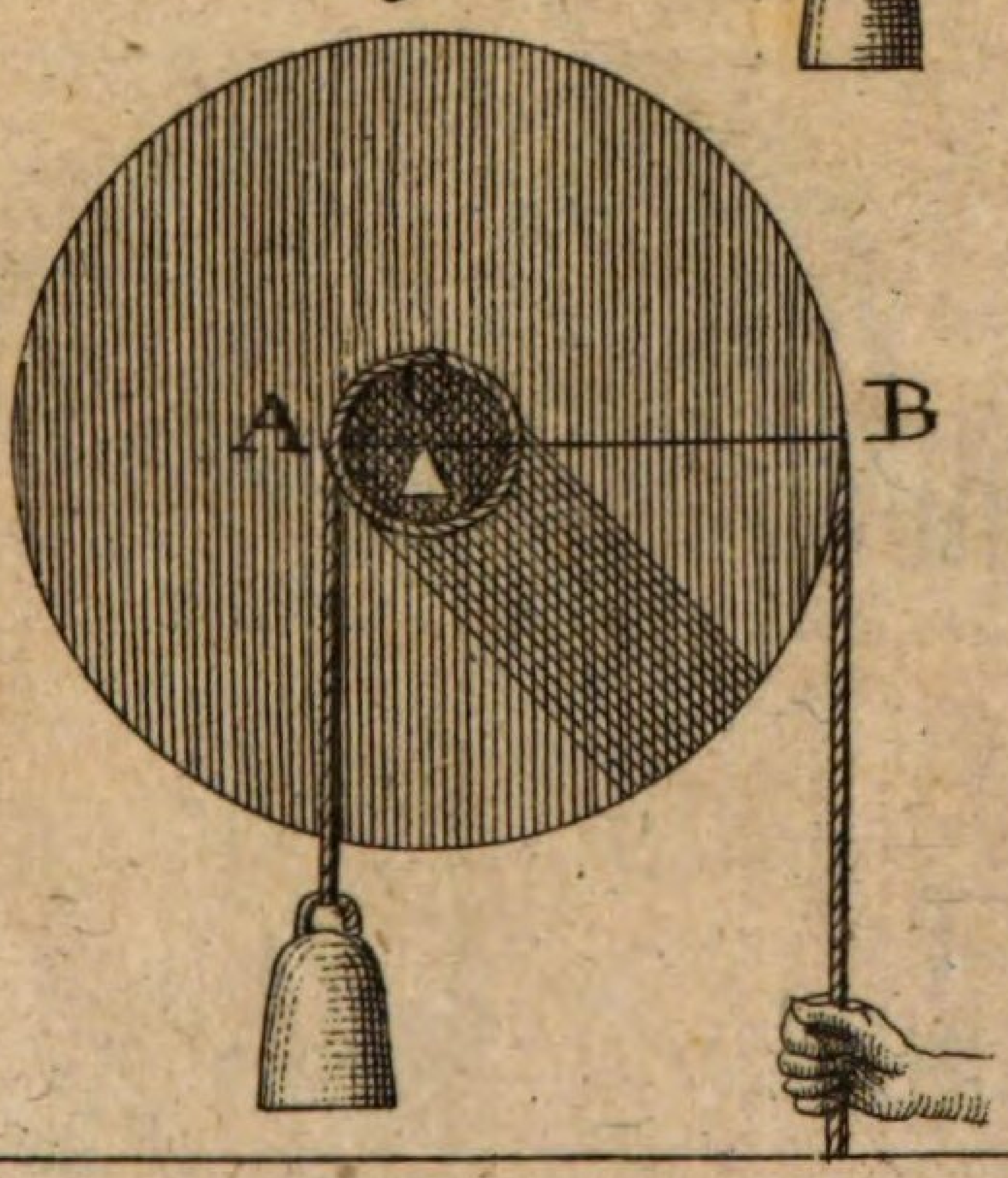


Fig. 8.

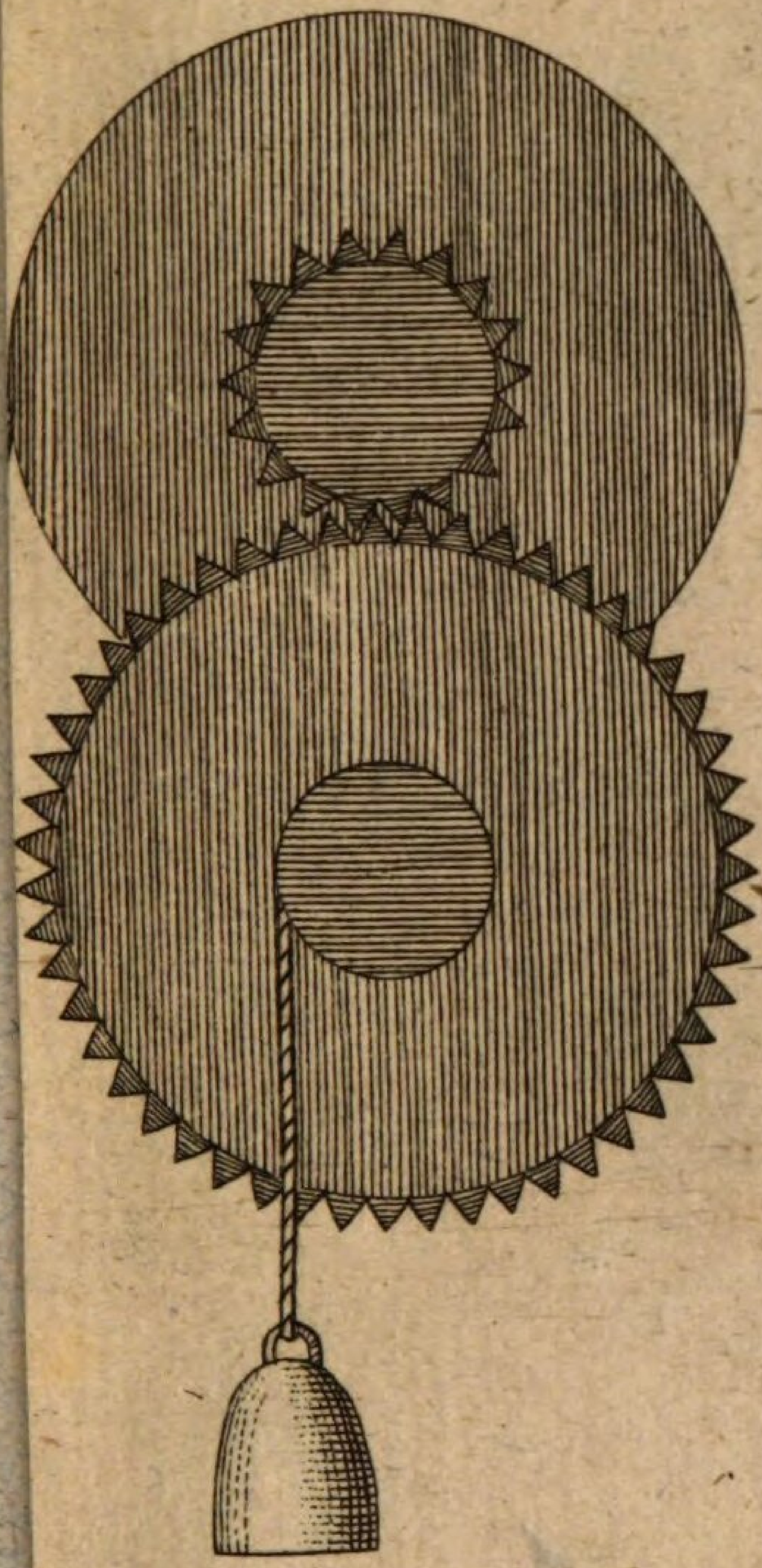
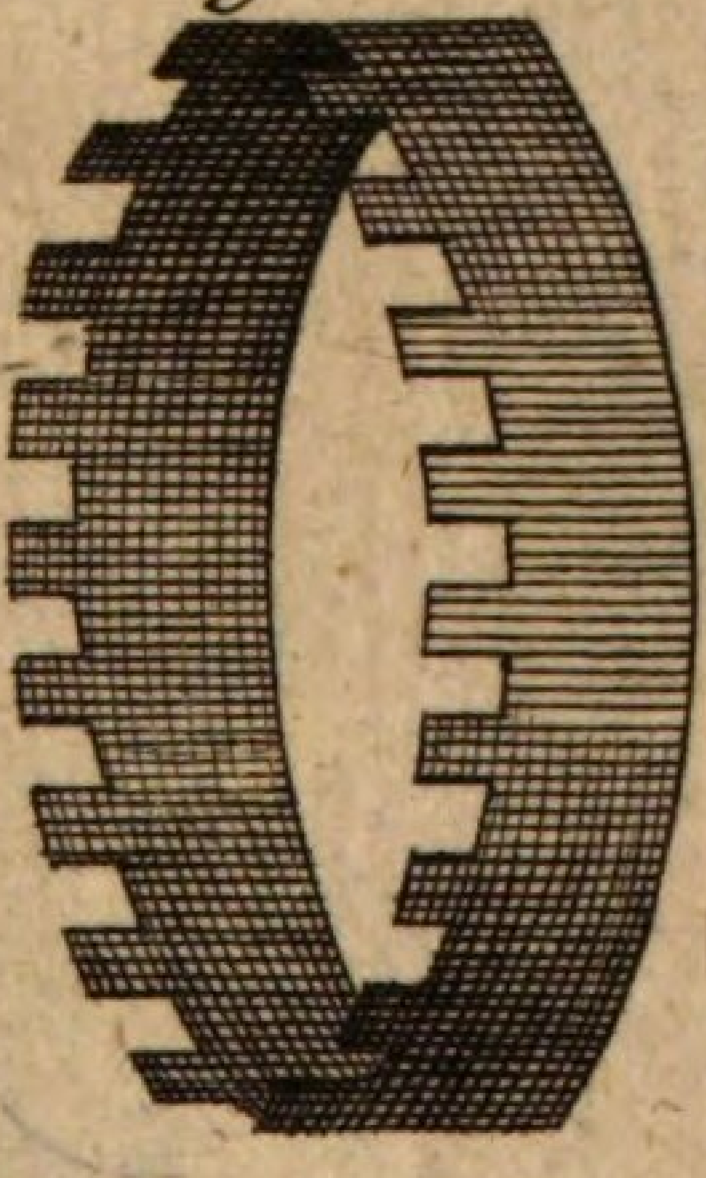
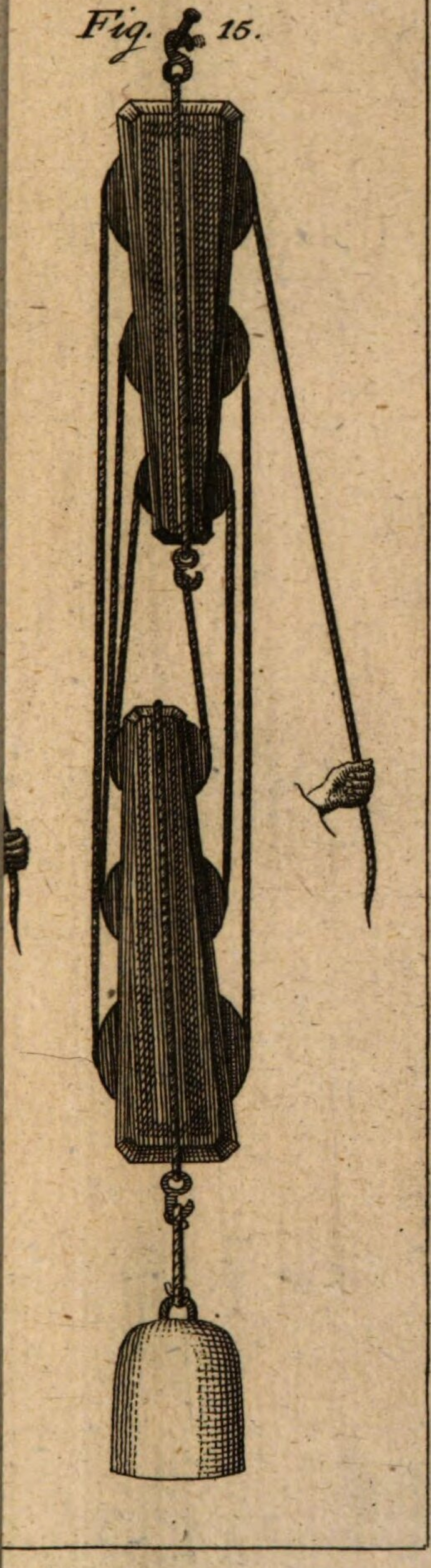


Fig. 10.



Tab. III.

Fig. 16.



Tab. IV.

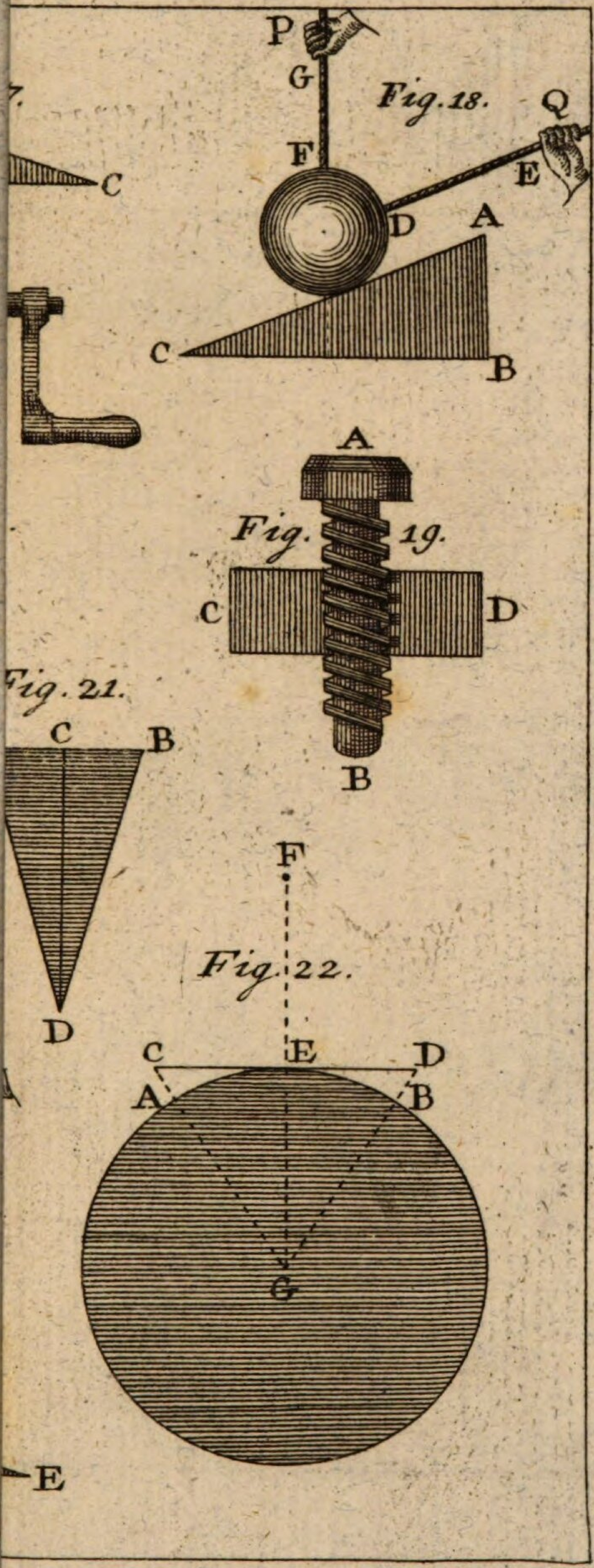
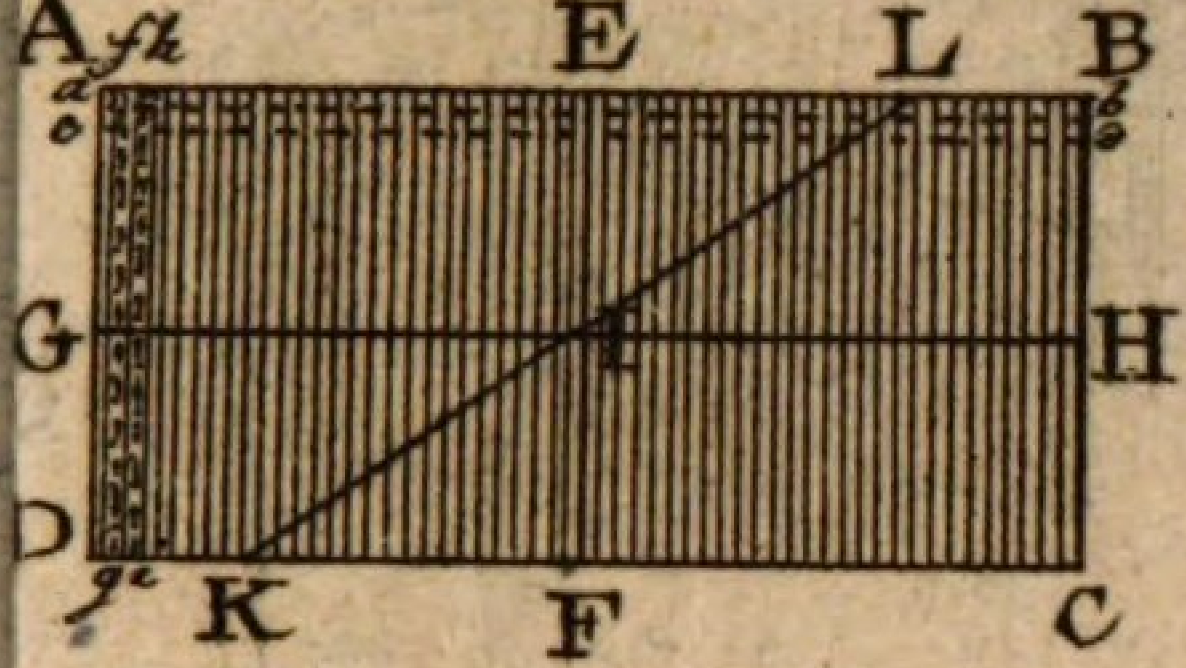


Fig. 27.



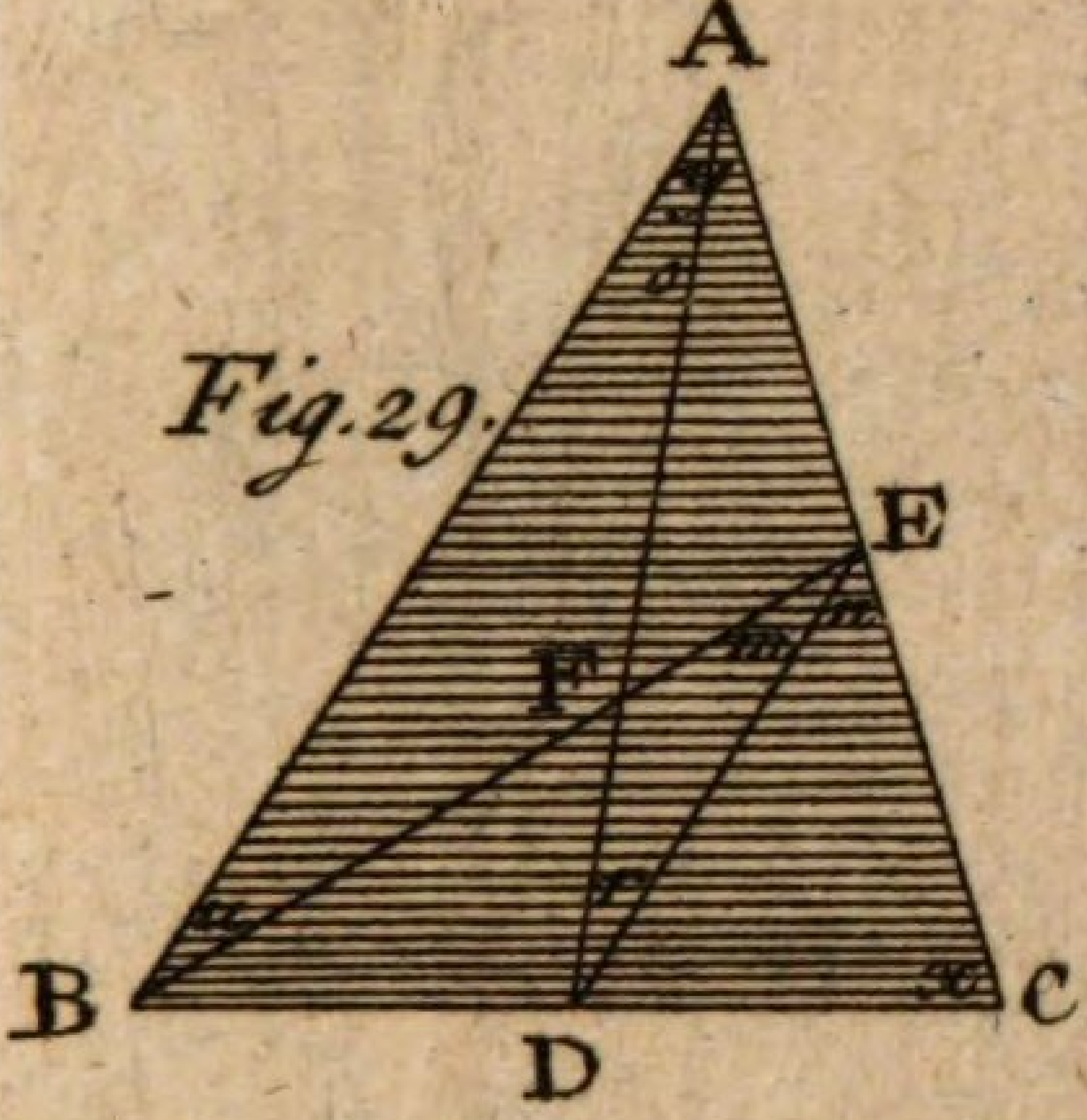


Fig. 29.

Fig. 33.

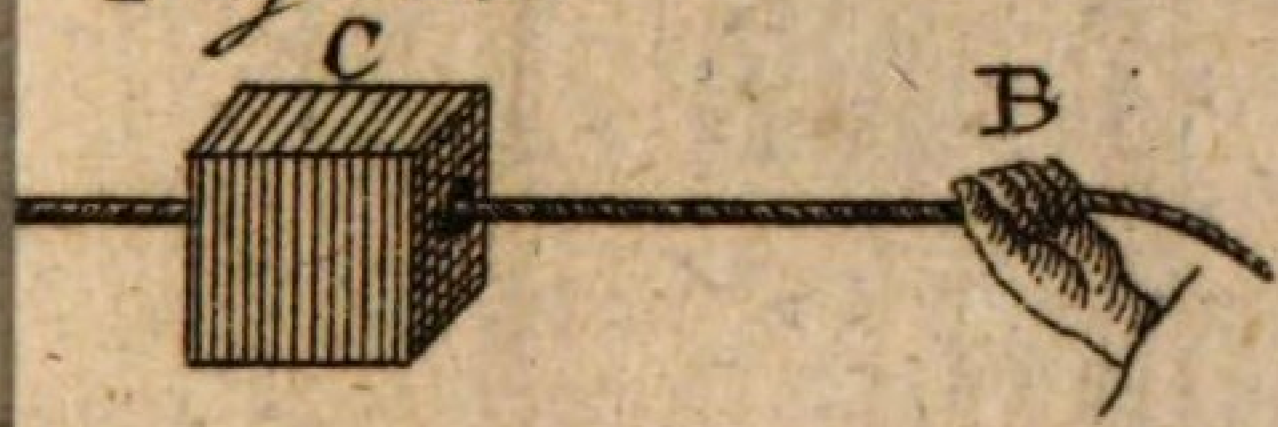
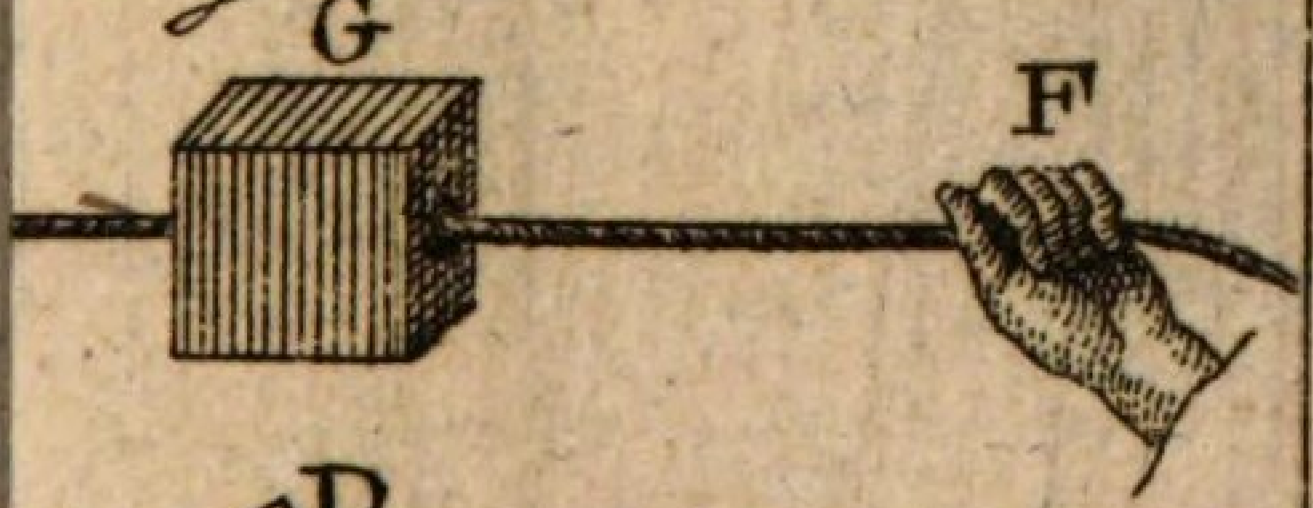
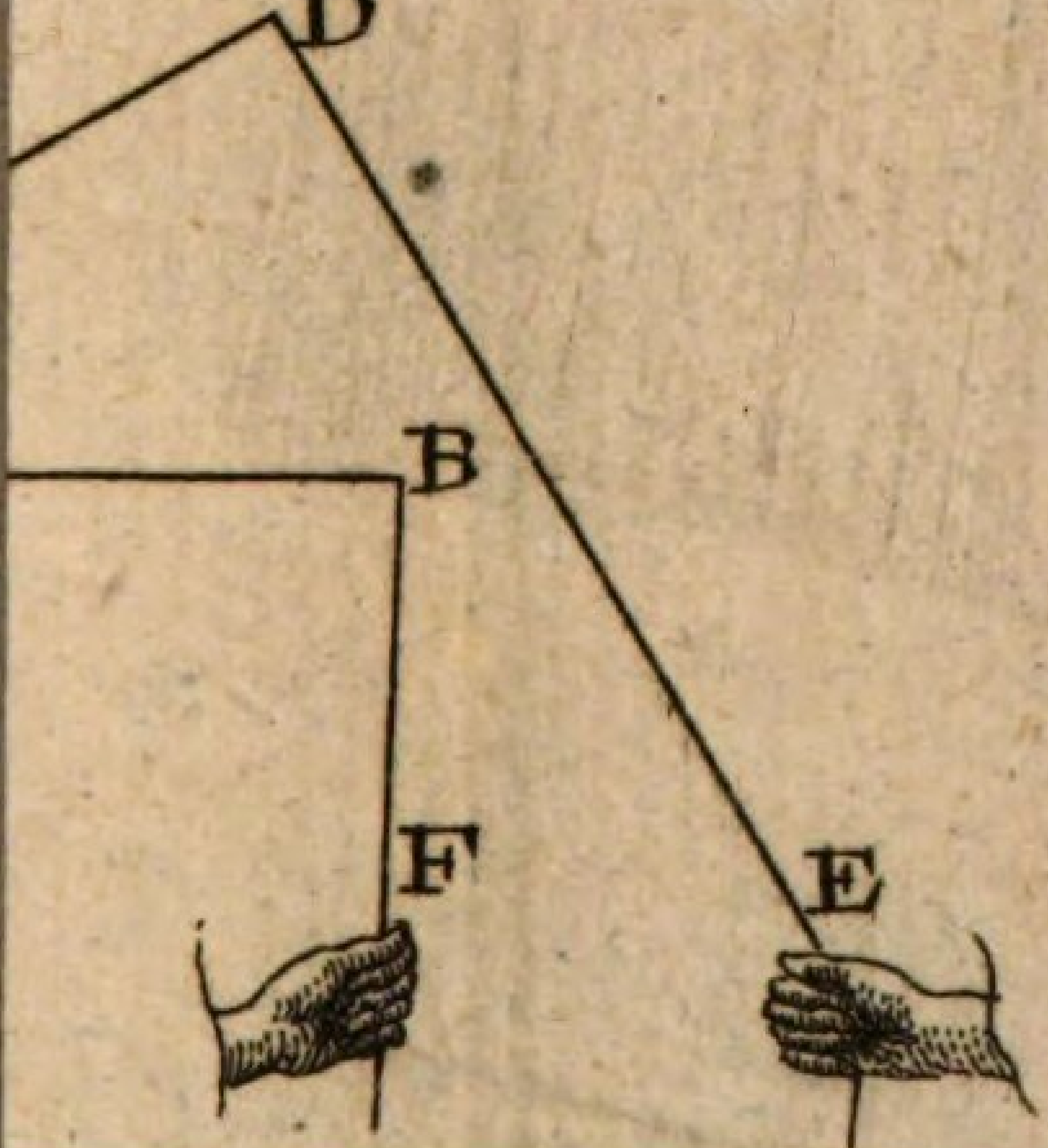


Fig. 34.





Tab. VI.

Fig. 40.
E
A
Q
o
y
B
u
D
P
2
3
4
B
5
P
Fig. 38.
C
1
2
3
4
5
B
I
a
II
b
III
c
IV
d
V
A
D
Fig. 42.
D
C
E
A
B
F
I
o
y
Q
G
P
H

Tab.VII.

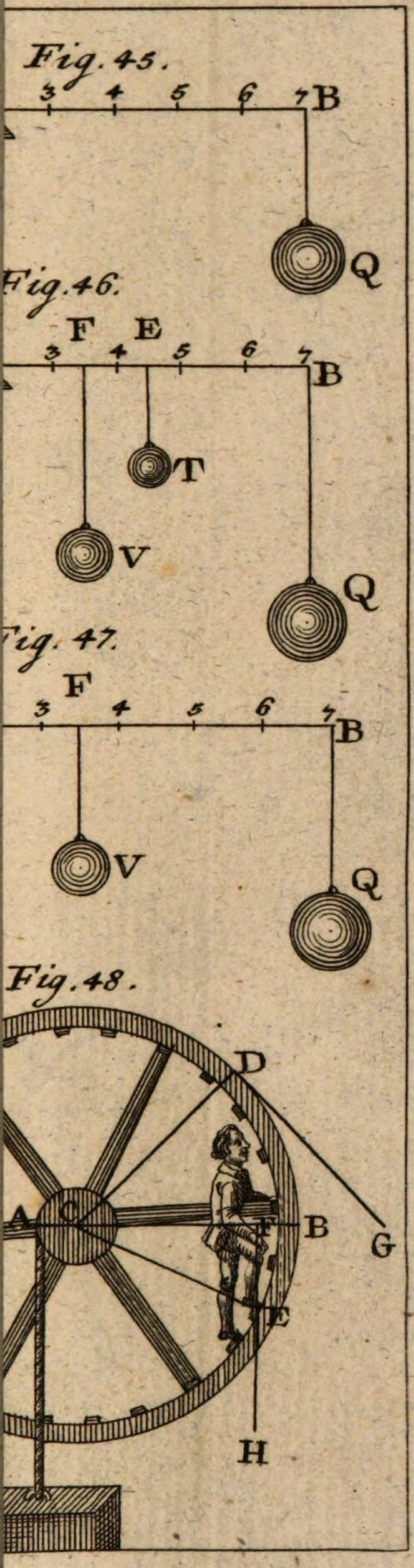
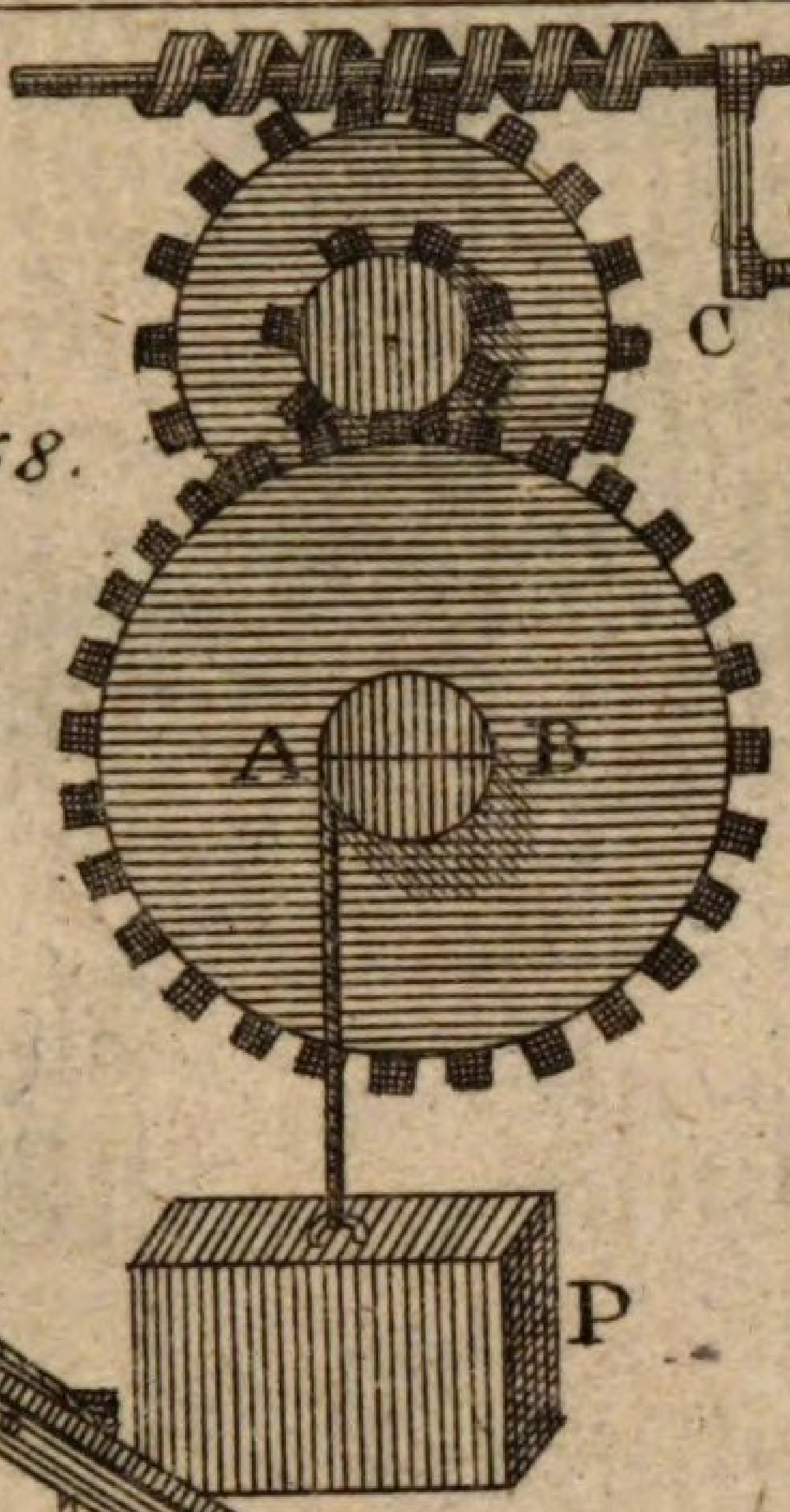


Fig. 45.
3
4
5
6
7
B
Q
Fig. 46.
F
E
3
4
5
6
7
B
T
V
Q
Fig. 47.
F
3
4
5
6
7
B
V
Q
Fig. 48.
D
A
C
F
B
G
E
H

Tab. VIII.

Fig. 51.
D
G
E
H
C
F
E
G
H
ad Fig. 51.
F
C
A
O
D
Fig. 53.
H
E
B
C
A
D
B
Fig. 56.
E
F
P
C
Q
A
D
B
Fig. 57.
E
F
C
Q
H
H

Fig. 58.



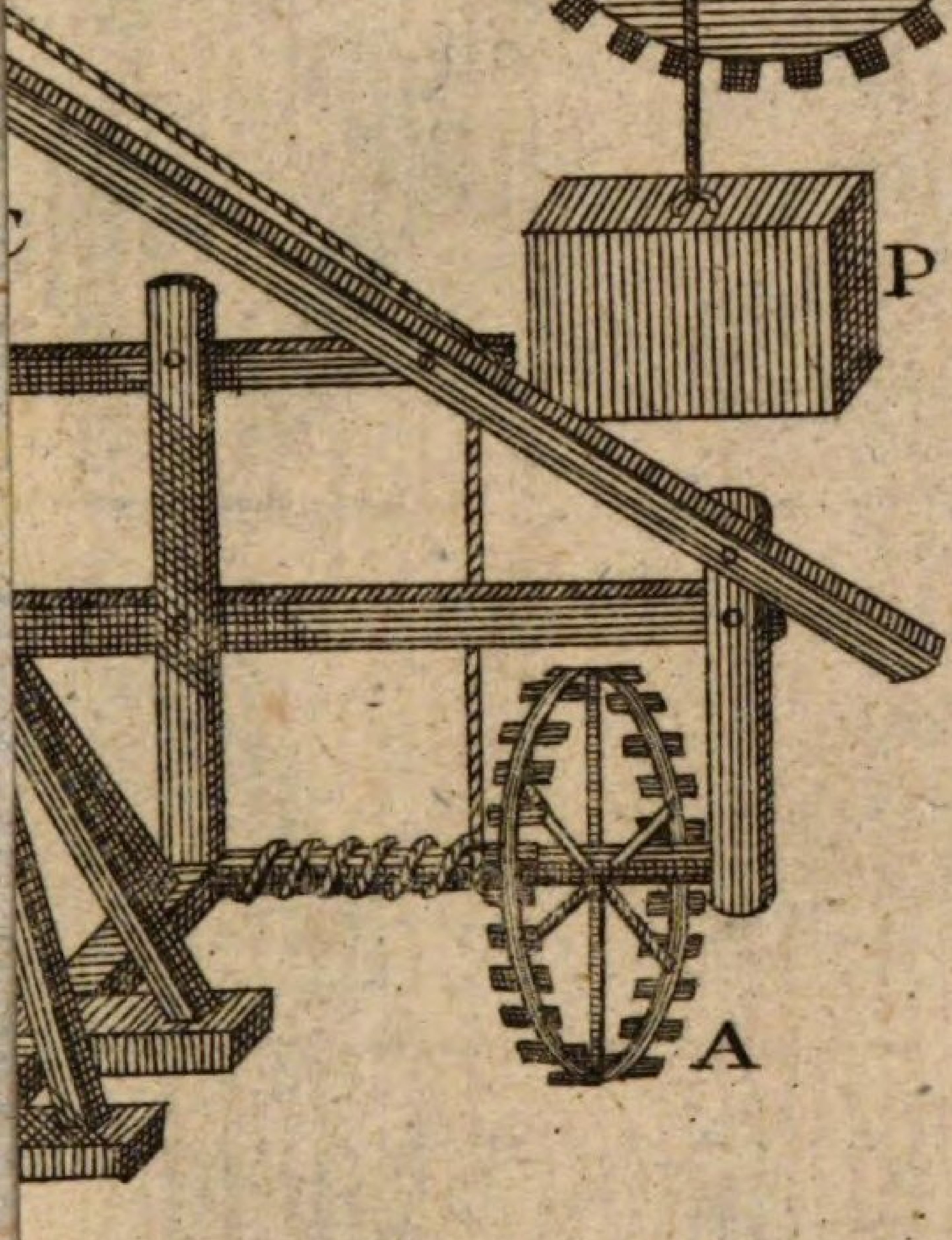
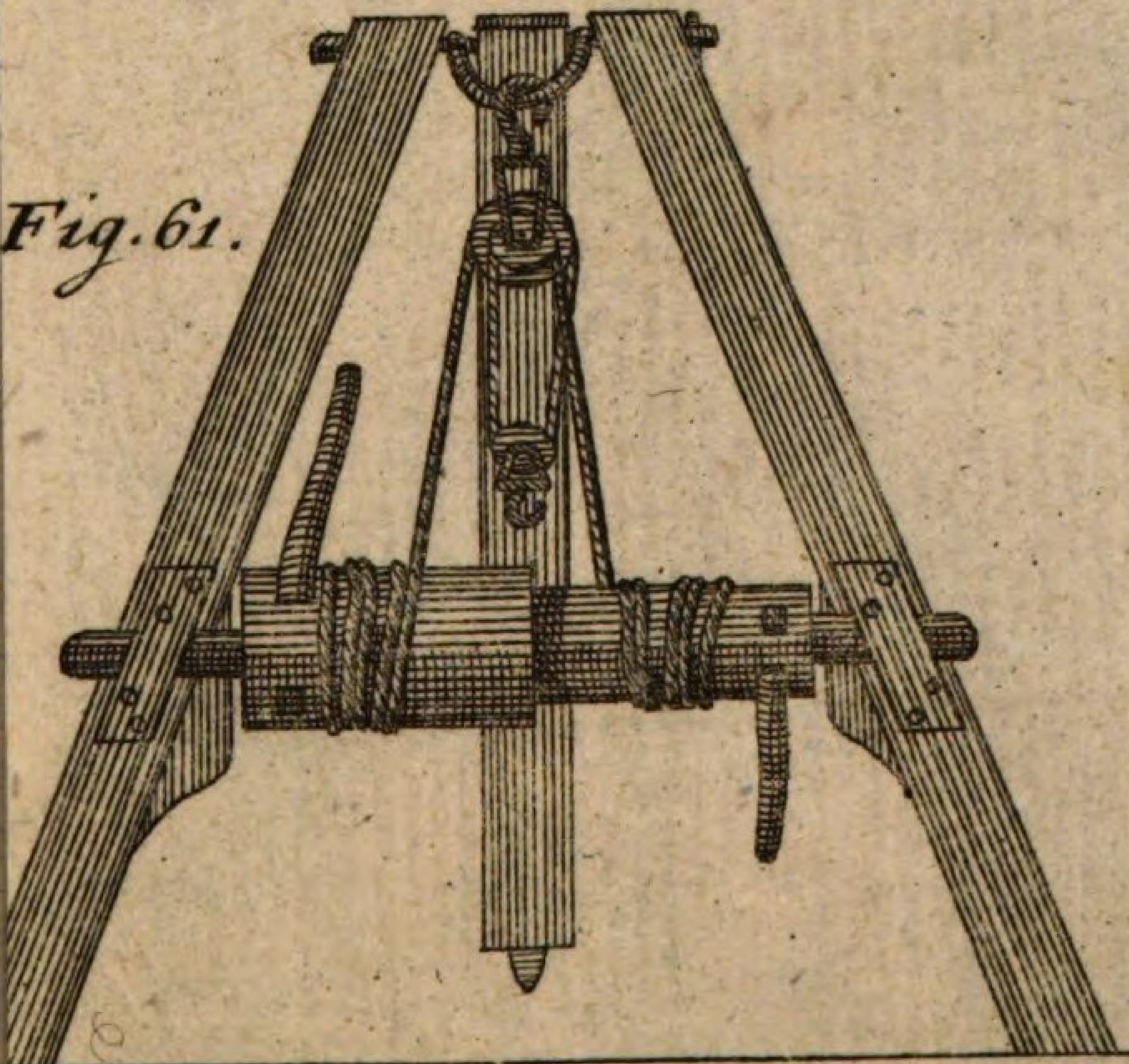


Fig. 61.



Tab. X.

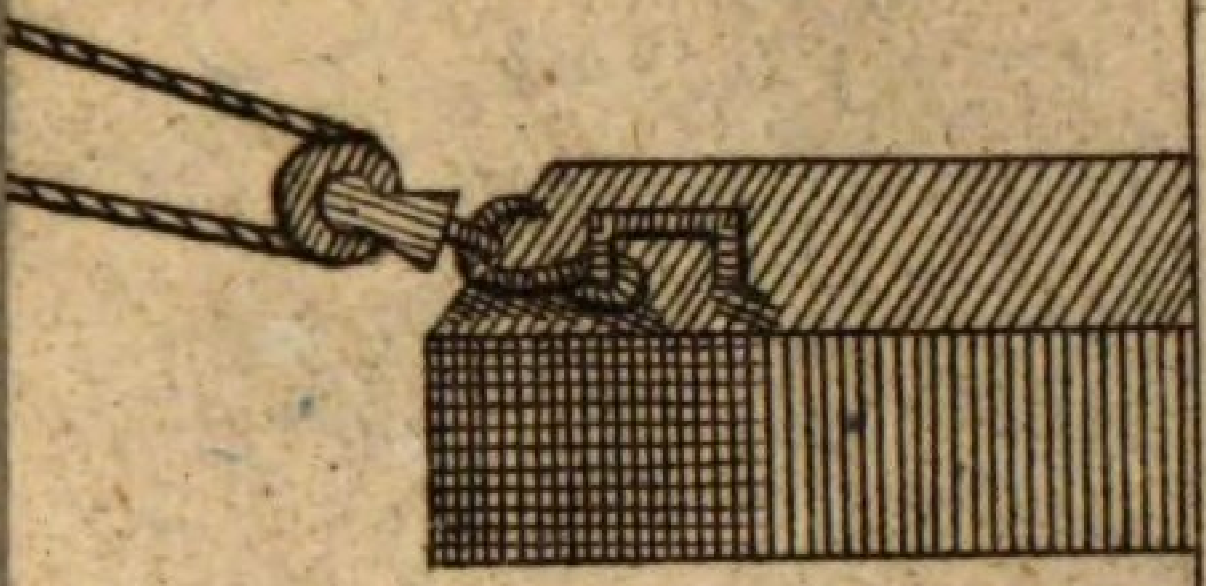


Fig. 66.

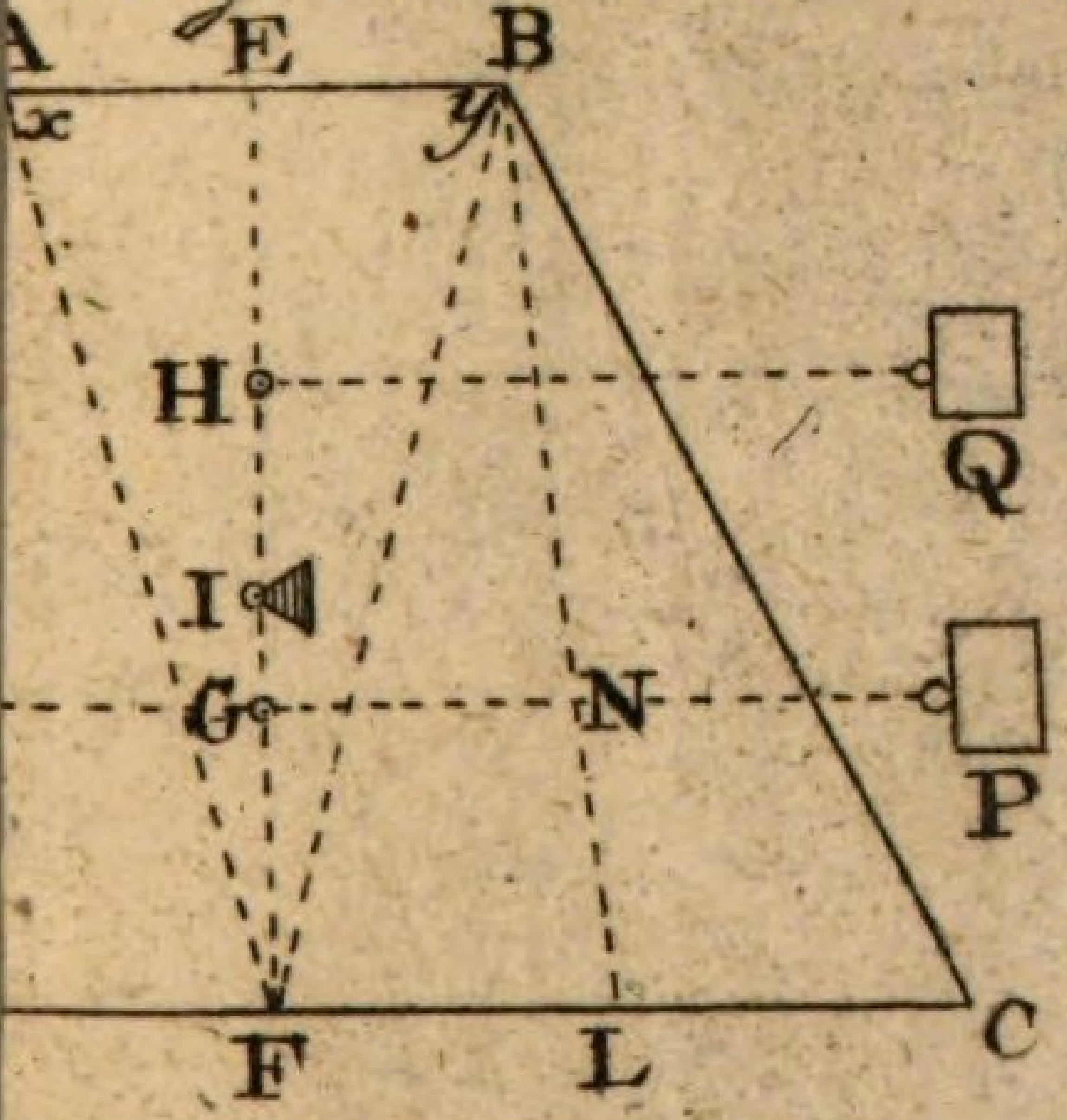
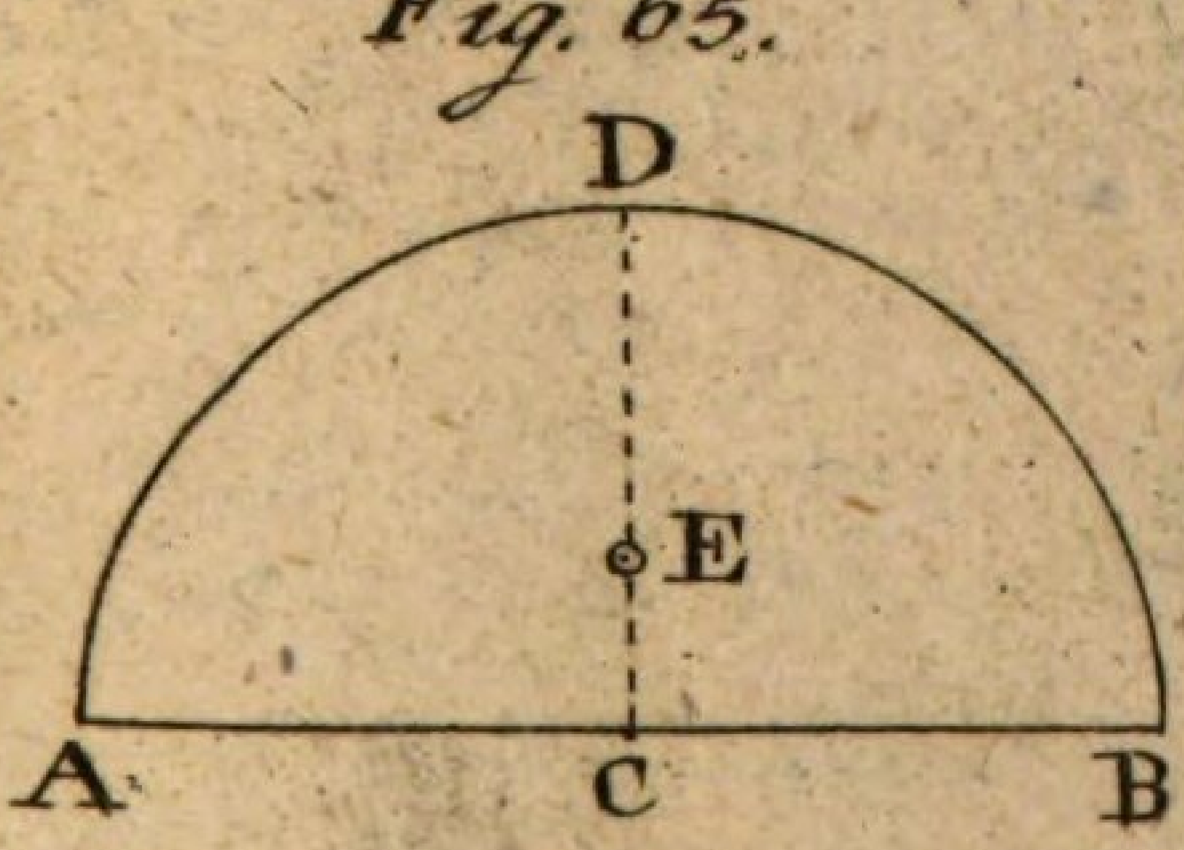
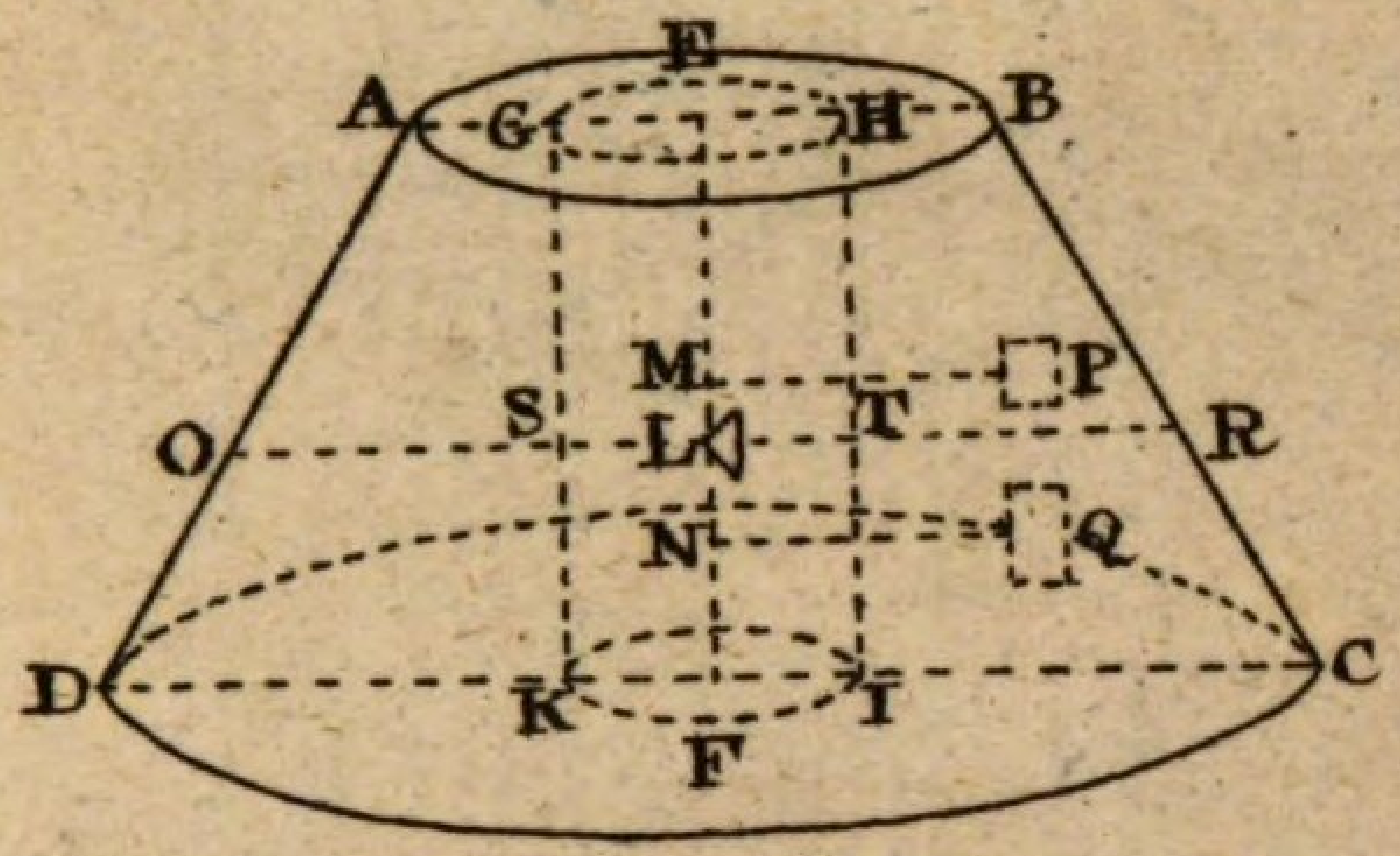


Fig. 65.



Tab. XI.

Fig.74.



75.

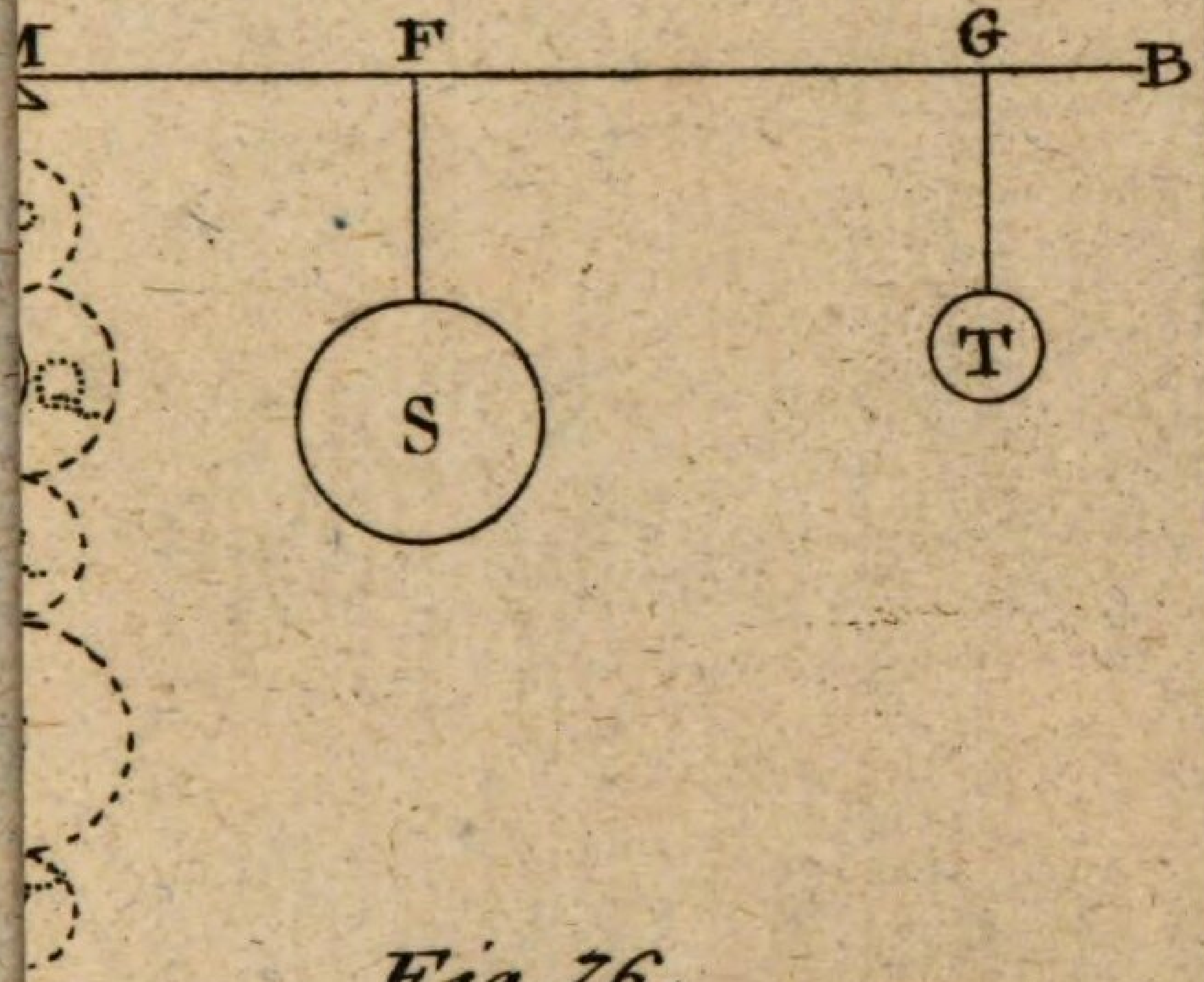
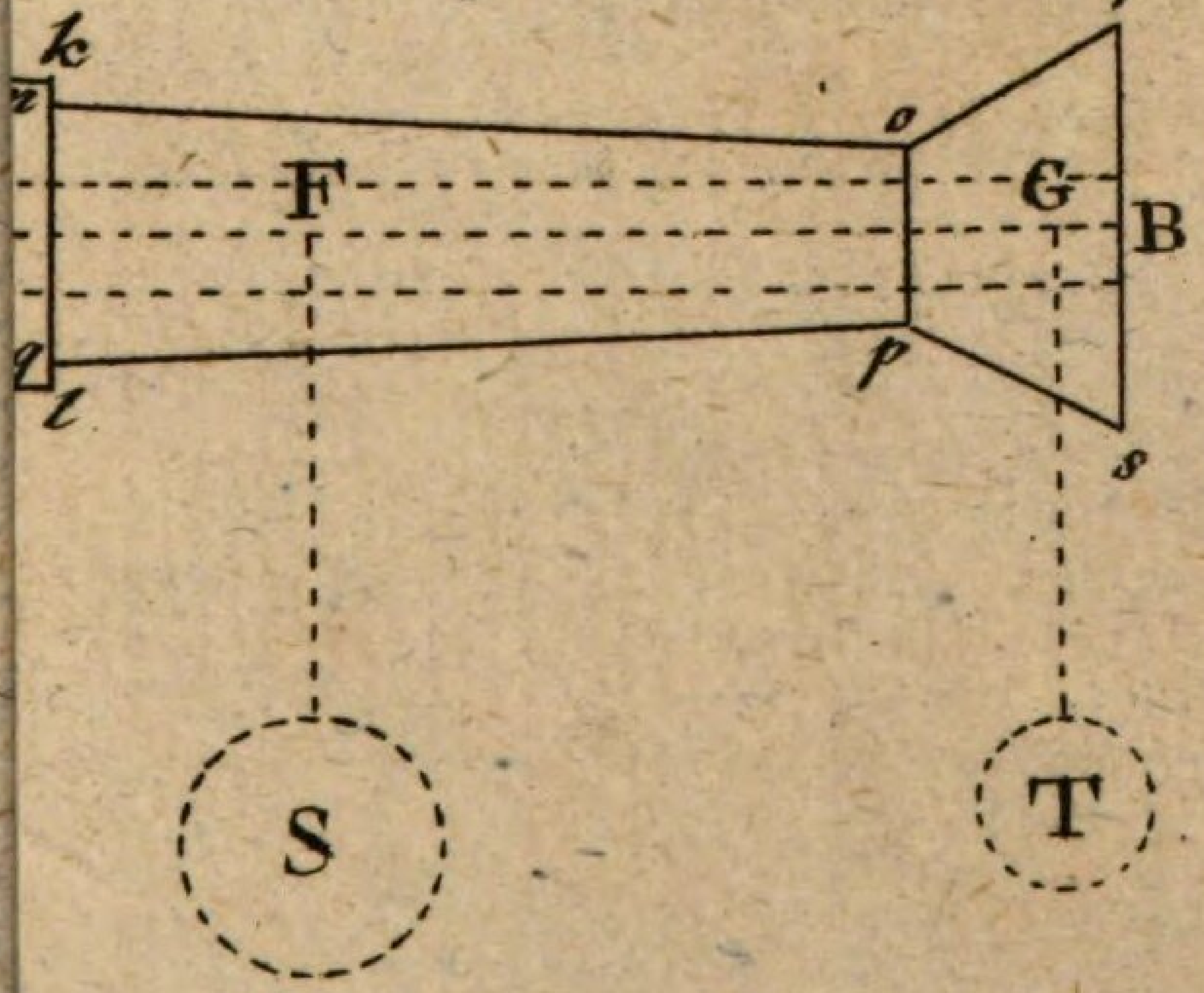


Fig.76.



j

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Krebs, Joh.

Anfangsgründe der Mechanik

Copenhagen 1802

Math.a. 134
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080855-2